Ministerul Educației și Cercetării

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie $(G, \cdot)$ un grup, cu elementul neutru e, iar A o submulţime nevidă a sa. Notăm cu $AA = \{xy \mid x, y \in A\}$.
a) Arătaţi că dacă G este finit, atunci $AA = A$ dacă şi numai dacă $e \in A$ şi $|AA| = |A|$.
b) Daţi un exemplu de grup G şi o submulţime $A \subseteq G$, cu $AA \neq A$, $|AA| = |A|$ şi $AA < G$.
(Notaţia $H < G$ înseamnă că H este un subgrup propriu al grupului G, adică un subgrup al lui G diferit de grupul G.)

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup, iar $H < G$ un subgrup propriu al lui G. Dacă există morfisme $f, g, h : G \longrightarrow G$ ale grupului G, cu proprietatea că $f(xy) = g(x)h(y)$ pentru orice $x, y \in G \setminus H$, arătaţi că:
a) $g = h$;
b) dacă G este neabelian, iar $H = Z(G)$, atunci $f = g = h$.
(Mulţimea $Z(G) = \{c \in G \mid cx = xc,\ \forall x \in G\}$ se numeşte centrul grupului G.)

Problema 3. a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ două numere reale, cu $a < b$, iar $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie strict monotonă cu proprietatea că $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Arătaţi că $f(a) \cdot f(b) < 0$.
b) Determinaţi şirurile convergente $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale, pentru care există o funcţie strict monotonă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx\,, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Problema 4. Fie $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Definim funcţia $\tilde{f} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ prin

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \cdot \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & , \text{ dacă } x > 0, \\ f(0) & , \text{ dacă } x = 0. \end{cases}$$

Arătaţi că:
a) funcţia $\tilde{f}$ este continuă în 0 şi derivabilă pe $(0, 1]$;
b) are loc egalitatea

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 + \int_0^1 \left(f(x) - \tilde{f}(x)\right)^2 dx.$$

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.