MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2025

CLASA a IX-a – soluţii

Problema 1. Fie $ABCD$ un paralelogram şi O intersecţia diagonalelor. Demonstraţi că pentru orice punct $M \in (AB)$, există în mod unic punctele $N \in (OC)$ şi $P \in (OD)$ astfel încât O este centrul de greutate al triunghiului MNP.

Soluţie. Un punct $M \in (AB)$ este unic determinat de $k \in (0, \infty)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = k$, de unde avem $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{OB}$. .... **2 puncte**

Pentru a găsi punctele N şi P în mod unic, trebuie să găsim $x, y \in (0, \infty)$ în mod unic astfel încât $\frac{ON}{NC} = x$, $\frac{OP}{PD} = y$ şi O este centrul de greutate al triunghiului MNP. .... **2 puncte**

De aici avem $\overrightarrow{ON} = \frac{x}{x+1}\overrightarrow{OC} = -\frac{x}{x+1}\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OP} = \frac{y}{y+1}\overrightarrow{OD} = -\frac{y}{y+1}\overrightarrow{OB}$. .... **1 punct**

Deoarece $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ sunt necoliniari, O este centrul de greutate al triunghiului MNP dacă şi numai dacă $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{k}$ şi $\frac{y}{y+1} = \frac{k}{k+1} \Leftrightarrow y = k$, adică punctul N este unic determinat de raportul $x = \frac{1}{k} = \frac{ON}{NC}$, iar punctul P este unic determinat de raportul $y = k = \frac{OP}{PD}$, ceea ce încheie problema. .... **2 puncte**

Problema 2. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\frac{1}{\{x\}} + \frac{1}{[x]} + \frac{1}{x} = 0,$$

unde $[x]$ şi $\{x\}$ sunt partea întreagă, respectiv partea fraţionară a numărului real x.

Gazeta Matematică

Soluţie. Din condiţiile de existenţă, $x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} \cup [0, 1))$. .... **1 punct**

Ecuaţia din enunţ este echivalentă cu:

$$\frac{[x] + \{x\}}{[x]\{x\}} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow -x^2 = [x]\{x\}. \qquad (\star)$$

.... **1 punct**

Deoarece $-x^2 \leq 0$ şi $x \neq 0$, avem că $[x]\{x\} < 0$, deci $[x] \leq -1$. .... **1 punct**

Dacă $[x] = -k$, $k \in \mathbb{N}^\star$, ecuaţia $(\star)$ devine $-x^2 = -k(k + x)$, ceea ce este echivalent cu $x^2 - kx - k^2 = 0$, având soluţiile $x_{1,2} = \frac{k \pm k\sqrt{5}}{2}$. Din $[x] = -k$, obţinem că singura soluţie posibilă ar fi $x_1 = \frac{k - k\sqrt{5}}{2}$. .... **2 puncte**

În final, trebuie să găsim valorile lui $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\left[\frac{k-k\sqrt{5}}{2}\right] = -k$, ceea ce este echivalent cu:

$$-k \leq k\frac{1-\sqrt{5}}{2} < -k + 1 \Leftrightarrow 3k \geq k\sqrt{5} > 3k - 2,$$

de unde obţinem $k < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, adică $k \in \{1,2\}$. De aici obţinem soluţiile $x_1^\star = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ şi $x_2^\star = 1-\sqrt{5}$, care verifică ecuaţia dată. .... **2 puncte**

Problema 3. Determinați numerele reale pozitive a, b, c, d astfel încât $a+b+c+d = 80$ și

$$a + \frac{b}{1+a} + \frac{c}{1+a+b} + \frac{d}{1+a+b+c} = 8.$$

Soluţie. A două relaţie după adunare cu 4 în ambii membri se scrie:

$$1+a+\frac{1+a+b}{1+a}+\frac{1+a+b+c}{1+a+b}+\frac{1+a+b+c+d}{1+a+b+c} = 12.$$

.... **2 puncte**

Aplicând inegalitatea mediilor succesiv obţinem:

$$1+a+\frac{1+a+b}{1+a} \geq 2\sqrt{(1+a)\cdot\frac{1+a+b}{1+a}} = 2\sqrt{1+a+b};$$

$$\frac{1+a+b+c}{1+a+b}+\frac{1+a+b+c+d}{1+a+b+c} \geq 2\sqrt{\frac{1+a+b+c}{1+a+b}\cdot\frac{1+a+b+c+d}{1+a+b+c}} = 2\sqrt{\frac{81}{1+a+b}}.$$

.... **2 puncte**

Prin adunarea celor două inegalităţi şi aplicând din nou inegalitatea mediilor se ajunge la:

$$12 = 1+a+\frac{1+a+b}{1+a}+\frac{1+a+b+c}{1+a+b}+\frac{1+a+b+c+d}{1+a+b+c} \geq 2\sqrt{1+a+b}+\frac{18}{\sqrt{1+a+b}} \geq 12.$$

.... **1 punct**

Observăm că avem egalitate în inegalitatea mediilor în toate cele trei cazuri de mai sus. De aici obţinem $a+b=8$, respectiv $1+a = \frac{1+a+b}{1+a} = \frac{1+a+b+c}{1+a+b} = \frac{1+a+b+c+d}{1+a+b+c} = 3$. Aşadar, numerele căutate sunt $a=2$, $b=6$, $c=18$, $d=54$. .... **2 puncte**

Problema 4. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir crescător nemărginit de numere naturale cu $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} \leq 2x_n$, pentru orice $n \geq 1$. Demonstraţi că orice număr natural nenul se poate scrie ca sumă finită de termeni distincţi doi câte doi ai şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

Notă: Doi termeni x_i şi x_j ai şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ se numesc distincți dacă $i \neq j$.

Soluţie. Fie k un număr natural nenul astfel încât $1 \leq k < 2x_n$ pentru un $n \geq 1$ natural. Vom demonstra prin inducţie că putem scrie $k = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i$ cu $\varepsilon_i \in \{0,1\}, i = \overline{1,n}$. Deoarece şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit, putem acoperi toate numerele naturale nenule cu această construcţie. .... **2 puncte**

Afirmaţia de mai sus este adevărată pentru $n = 1$.

Presupunem că am demonstrat-o pentru $n = N$. Vom demonstra în continuare că orice $1 \leq k < 2x_{N+1}$ se poate scrie $k = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i x_i$ cu $\alpha_i \in \{0,1\}$, $i = \overline{1,N+1}$. .... **1 punct**

Dacă $x_N = x_{N+1}$, atunci avem din ipoteza din inducţie $k = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i x_i$ şi putem scrie $\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i x_i$, cu $\alpha_i = \varepsilon_i$, $i = \overline{1, N}$, şi $\alpha_{N+1} = 0$. .... **1 punct**

Dacă $x_N < x_{N+1}$, este suficient să considerăm valorile lui k pentru care $2x_N \leq k < 2x_{N+1}$, deoarece cazul $k < 2x_N$ este acoperit de ipoteza de inducţie. .... **1 punct**

În acest fel, $k - x_{N+1} \geq 2x_N - x_{N+1} \geq 0$ conform ipotezei problemei. Distingem două cazuri:

Cazul 1. Dacă $k - x_{N+1} = 0$, afirmaţia este evident adevărată.

Cazul 2. Dacă $k - x_{N+1} > 0$, folosim din nou ipoteza problemei şi, din condiţia:

$$0 < k - x_{N+1} < 2x_{N+1} - x_{N+1} \leq 2x_N,$$

conform ipotezei de inducţie, putem scrie $k - x_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i x_i$ cu $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, N}$. Adunăm x_{N+1} în ambele părţi ale egalităţii precedente şi considerăm $\alpha_i = \varepsilon_i$ pentru $i = \overline{1, N}$ şi α_{N+1}=1. Inducţia se încheie. .... **2 puncte**