Colegiul Naţional Iaşi
Inspectoratul Şcolar al Judeţului Iaşi

Al IX-lea Concurs Naţional de Matematică "Alexandru Myller"
2 aprilie 2011

CLASA A VII-A - barem de corectare

Problema 1. Fie p un număr natural prim. Determinaţi numărul perechilor (x,y) de numere naturale care verifică egalitatea $\sqrt{x^2+p^4}=y$.

Soluţie. Relaţia din enunţ se mai scrie $p^4=y^2-x^2=(y-x)(y+x)$ **1p**
deci avem cazurile $y-x=1$ şi $y+x=p^4$, de unde $(x;y)=\left(\dfrac{p^4-1}{2};\dfrac{p^4+1}{2}\right)$ pentru $p>2$. **2p**
$y-x=p$ şi $y+x=p^3$, de unde $(x;y)=\left(\dfrac{p^3-p}{2};\dfrac{p^3+p}{2}\right)$, pentru oricare p prim. **2p**
$y-x=p^2$ şi $y+x=p^2$, de unde $(x;y)=\left(0;p^2\right)$, pentru oricare p prim. **1p**
Deci, pentru p număr prim impar, avem câte trei soluţii iar pentru $p=2$, avem două soluţii. **1p**

Problema 2. Fie mulţimile

$$A=\left\{(x;y)\mid 0<x\le y<1; x+y\ge 1; xy\le\frac{1}{4}\right\},$$
$$B=\left\{(x;y)\mid 0<x\le y<1; x+y\le 1; xy\ge\frac{1}{4}\right\}.$$

a) Să se arate că mulţimea A are cel puţin 2011 elemente.
b) Să se determine mulţimea B.

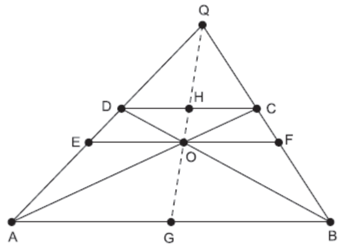
Soluţie. a) $x=\dfrac{1}{2}+a, y=\dfrac{1}{2}+b$ şi $x+y\ge 1$ implică $a+b\ge 0$. (1) **1p**

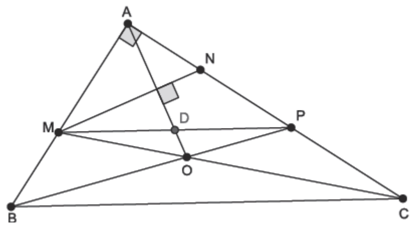
Deoarece $xy\le\dfrac{1}{4}$, rezultă că $\dfrac{1}{4}+\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}+ab\le\dfrac{1}{4}$, de unde $\dfrac{a+b}{2}+ab\le 0$ şi, ţinând cont de (1), rezultă că $ab\le 0$. **1p**
Considerăm $a\le 0, b\ge 0$ şi luăm $a=-c$, cu $c\ge 0$. Cum $a+b\ge 0$, atunci $b\ge c$ şi alegem $c\ge\dfrac{b}{2b+1}$. **2p**
b) Deoarece $\sqrt{xy}\le\dfrac{x+y}{2}\le\dfrac{1}{2}$ **1p**
atunci $xy\le\dfrac{1}{4}$ şi cum $xy\ge\dfrac{1}{4}$ **1p**
deducem că are loc egalitatea în inegalitatea mediilor. Deci $x=y=\dfrac{1}{2}$. **1p**

Problema 3. a) Fie $ABCD$ un trapez cu $AB\parallel CD$ în care $\{O\}=AC\cap BD$ şi $\{Q\}=AD\cap BC$. Demonstraţi că dreapta OQ conţine mijloacele bazelor trapezului.

b) Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle BAC) = 90^o$ şi $AB < AC$. Punctele M şi N sunt situate pe laturile $[AB]$ şi respectiv $[AC]$ astfel încât $AM \cdot AB = AN \cdot AC$. Paralela prin punctul M la dreapta BC intersectează $[AC]$ în punctul P. Dacă $\{O\} = BP \cap CM$, arătaţi că $AO \perp MN$.

Soluţie. a) Considerăm paralela prin punctul O la bazele trapezului. Aceasta intersectează segmentele $[AD]$ şi $[BC]$ în punctele E şi F. Perechile $(\Delta AOE; \Delta ACD)$, $(\Delta AOB, \Delta COD)$ şi $(\Delta BOF, \Delta BDC)$ sunt formate din triunghiuri asemenea. Obţinem succesiv: $\dfrac{OE}{DC} = \dfrac{AO}{AC} = \dfrac{BO}{BD} = \dfrac{OF}{DC}$. Deducem că $[OE] \equiv [OF]$. **1p**
Fie $\{H\} = QO \cap CD$ şi $\{G\} = QO \cap AB$. Triunghiurile QDH şi QEO sunt asemenea, deci $\dfrac{DH}{EO} = \dfrac{QH}{QO}$. Triunghiurile QCH şi QFO sunt asemenea, deci $\dfrac{CH}{FO} = \dfrac{QH}{QO}$. Prin urmare, $[DH] \equiv [HC]$. Analog, obţinem $[GA] \equiv [GB]$. **2p**

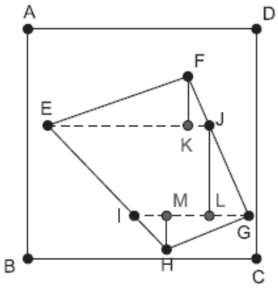




b) Relaţia din enunţ se mai scrie $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AN}{AB}$, de unde $\Delta AMN \sim \Delta ACB$. **1p**
Rezultă că $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle APM$. **1p**
Dacă $\{D\} = AO \cap MP$ atunci, conform a), rezultă că $[AD]$ este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul AMP. Înseamnă că $\sphericalangle APM \equiv \sphericalangle PAD \equiv \sphericalangle AMN$. **1p**
Deducem că $AO \perp MN$. **1p**

Problema 4. În interiorul unui pătrat de latură 1 se află un patrulater convex de arie $\frac{1}{2}$. Demonstraţi că există o dreaptă d paralelă cu una dintre laturile pătratului care intersectează patrulaterul şi determină cu laturile acestuia un segment cu lungimea mai mare sau egală cu $\frac{1}{2}$.

Soluţie. Fie $EFGH$ patrulaterul de arie $\frac{1}{2}$ situat în interiorul pătratului $ABCD$ de latură 1. Prin punctele E şi G ducem paralelele EJ şi GI la dreapta BC, unde $J \in [FG]$ şi $I \in [EH]$. Se formează două triunghiuri şi un trapez cu înălţimile FK, HM şi respectiv JL. **2p**
Presupunem că $EJ < \frac{1}{2}$ şi $GI < \frac{1}{2}$. Atunci $A_{EFGH} = A_{FEJ} + A_{EJGI} + A_{HGI} < \frac{1}{2} \cdot \frac{FK}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{JL}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{HM}{2} < \frac{1}{2} \cdot (FK + JL + HM) < \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ – fals **4p**
Rezultă că $EJ \geq \frac{1}{2}$ sau $GI \geq \frac{1}{2}$. **1p**



Cazurile când una sau mai multe laturi ale patrulaterului $EFGH$ sunt paralele cu laturi ale pătratului $ABCD$ se tratează asemănător.

CLASA A VIII-A - barem de corectare

Problema 1. Determinaţi numărul real a cu proprietatea că

$$\left(a^2+2a-3\right)^3+\left(a^2-2a-15\right)^3=8\left(a^2-9\right)^3.$$

Soluţie. Fie $x=a^2+2a-3$, $y=a^2-2a-15$, deci $x+y=2a^2-18=2(a^2-9)$. **1p**

Relaţia din enunţ devine $x^3+y^3=(x+y)^3$, adică $(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)=(x+y)^3$. **1p**

Rezultă că $x+y=0$ sau $x^2-xy+y^2=(x+y)^2$, echivalent cu $xy=0$. **1p**

Dacă $x+y=0$, avem $a^2-9=0$, de unde $a\in\{\pm3\}$. **1p**

Dacă $xy=0$, obţinem $(a^2+2a-3)\cdot(a^2-2a-15)=0$ **1p**

adică $(a+3)(a-1)(a-5)(a+3)=0$, de unde $a\in\{-3;1;5\}$. **1p**

În final, $a\in\{\pm3;1;5\}$. **1p**

Problema 2. Se consideră pătratul $ABCD$ de latură 1. Punctele M,N,P şi Q sunt situate pe laturile $(AB),(BC),(CD)$ şi respectiv (DA). Demonstraţi că perimetrul patrulaterului $MNPQ$ este mai mare sau egal cu $2\sqrt{2}$.

Soluţie. Demonstrăm că $MN\geq\dfrac{MB+BN}{\sqrt{2}}$, echivalent cu $2MN^2\geq(MB+BN)^2$ sau $2(MB^2+BN^2)\geq MB^2+2MB\cdot BN+BN^2$, adică $(MB-BN)^2\geq0$. **3p**

Analog, $NP\geq\dfrac{NC+CP}{\sqrt{2}}$, $PQ\geq\dfrac{PD+DQ}{\sqrt{2}}$ şi $QM\geq\dfrac{QA+AM}{\sqrt{2}}$. **2p**

Însumând relaţiile de mai sus obţinem $P_{MNPQ}\geq\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$. **2p**

Problema 3. Fie x un număr iraţional. Se ştie că 36 este cel mai mic număr natural nenul cu proprietatea că numărul x^{36} este raţional. Determinaţi numărul de elemente raţionale din mulţimea $A=\{x^{a\cdot b}\mid a+b=36, a,b\in\mathbb{N}\backslash\{0\}\}$.

Soluţie. Avem, conform teoremei împărţirii cu rest, $ab=36k+r$, unde $k\in\mathbb{N}$ şi $r\in\mathbb{N}, r<36$. **1p**

Dacă numărul $x^{ab}=\left(x^{36}\right)^k\cdot x^r\in A$ este raţional, rezultă că $r=0$. Dacă şi $k=0$, atunci $ab=0$, fals. **2p**

Deci $ab=36k, k\geq1$, adică $a(36-a)=36k$, sau $a^2=36(a-k)$. **1p**

Înseamnă că 6 îl divide pe a, adică $a\in\{6;12;18;24;30\}$. **1p**

Obţinem 3 elemente diferite pentru $(a;b) \in \{(6;30),(12;24),(18;18)\}$. **2p**
şi anume x^{180}, x^{288} şi x^{324}.

Problema 4. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară dreaptă. Arătaţi că dacă dreptele $A'B, B'C$ şi $C'A$ sunt perpendiculare două câte două, atunci $AB = BC = CA = AA'\sqrt{2}$.

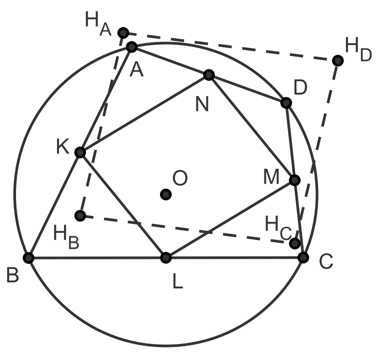
Soluţie. Fie D simetricul lui C faţă de A, rezultă că $ADA'C'$ este paralelogram, deci $A'D \parallel C'A$. Astfel $\sphericalangle(AC';A'B) = \sphericalangle DA'B$. **1p**
Fie E simetricul lui B faţă de mijlocul lui (AC). Rezultă că $B'C \parallel A'E$ şi $\sphericalangle(B'C;A'B) = \sphericalangle BA'E$. **1p**
De asemeni, $\sphericalangle(B'C;C'A) = \sphericalangle(A'E;A'D) = \sphericalangle DA'E$. Prin urmare, în piramida $A'DBE$, $m(\sphericalangle DA'B) = m(\sphericalangle BA'E) = m(\sphericalangle DA'E) = 90^o$ şi cum $A'A \perp (DBE)$, rezultă că A este ortocentrul ΔDBE. **2p**
Cum A este centrul de greutate al triunghiului DBE (DO mediană şi $AD = 2AO$). Rezultă că triunghiul ΔDBE este echilateral, deci $AD = AB = AE$ sau $AC = AB = BC$. **2p**
Notând $AB = BC = CA = l$ şi $AA' = h$, din ΔDBC dreptunghic în B, $BD = l\sqrt{3}$. Rezultă că $A'D = A'B = l\sqrt{\frac{3}{2}}$. Din $\Delta AA'B$, $AA'^2 = \frac{l^2}{2}$, deci $AA' = \frac{l}{\sqrt{2}}$. În concluzie $AC = AB = BC = AA'\sqrt{2}$. **1p**

Clasa a IX-a - barem de corectare

Problema 1. Fie K, L, M, N mijloacele laturilor (AB), (BC), (CD), respectiv (DA) ale patrulaterului $ABCD$ înscris într-un cerc de centru O. Notăm H_A, H_B, H_C, H_D, ortocentrele triunghiurilor AKN, BLK, CML, respectiv DNM.

a) Arătaţi că $2\overrightarrow{OH_A} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

b) Arătaţi că $H_AH_BH_CH_D$ este paralelogram.



Soluţie. a) Patrulaterul $ONAK$ este inscriptibil în cercul cu centrul în mijlocul P al segmentului OA. Cum P este centrul cercului circumscris triunghiului AKN, deducem $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PH_A}$. **2p**
Concluzia rezultă acum din $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{PK}$, $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{PA}$ şi $\overrightarrow{OH_A} = \overrightarrow{PH_A} + \overrightarrow{PA}$. **2p**

b) Din a) reiese $\overrightarrow{OH_A} + \overrightarrow{OH_C} = \overrightarrow{OH_B} + \overrightarrow{OH_D}$, deci segmentele $[H_AH_C]$ şi $[H_BH_D]$ au acelaşi mijloc, de unde concluzia. **3p**

Problema 2. Determinaţi numerele întregi a, b pentru care sistemul

$$\begin{cases} x^2 - 2ax - a - 2 = 0 \\ y^2 - 2by - x = 0 \end{cases}$$

are exact trei soluţii în mulţimea numerelor reale.

Soluţie. Sistemul este echivalent cu $x = x_i, y^2 - 2by - x_i = 0$, unde $x_1, i = 1, 2$ sunt soluţiile primei ecuaţii. **2p**

Existenţa a exact trei soluţii este echivalentă cu $x_{1,2} \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$ şi $b^2 + x_1 = 0$. **2p**

Din $a, b \in \mathbb{Z}$ reiese $x_{1,2} \in \mathbb{Z}$. **1p**

Observăm că $2x_1x_2 + x_1 + x_2 + 4 = 0$, de unde $(2x_1 + 1)(2x_2 + 1) = -7$. Sunt posibile doar cazul $x_1 = -4, x_2 = 0$ şi $x_1 = -1, x_2 = 3$, iar $a = -2, b = \pm 2$, respectiv $a = 1, b = \pm 1$ **2p**

Problema 3. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale definit prin $a_0 \in (0, 1)$ şi

$$a_{n+1} = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } a_n = 0 \\ \left\{\dfrac{n+1}{a_n}\right\}, & \text{dacă } a_n \neq 0 \end{cases}.$$

Arătaţi că a_0 este iraţional dacă şi numai dacă şirul nu are termeni nuli .

Soluţie. Dacă a_k este iraţional pentru un $k \geq 0$, atunci $a_{k+1} = \frac{k+1}{a_k} - \left[\frac{k+1}{a_k}\right]$ este iraţional. Cum a_0 este iraţional, rezultă inductiv că a_n este iraţional, deci nenul, pentru orice n. **3p**

Reciproc, dacă $a_0 = \frac{p}{q}, 0 < p < q$, atunci $a_1 = \frac{r}{p}$, cu $0 \leq r < p$, deci $a_1 \in \mathbb{Q}$ şi a_1 este reprezentat de o fracţie cu numitor mai mic decât cel al lui a_0. **2p**

Acelaşi lucru se petrece când trecem de la orice $a_n \neq 0$ la a_{n+1}; cum numitorii scad la fiecare pas, după cel mult q paşi obţinem termeni nuli. **2p**

Problema 4. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea:

$$(x^2 + xy + y^2)(f(x) - f(y)) = f(x^3) - f(y^3), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. Avem $x^2(f(x) - f(0)) = f(x^3) - f(0)$ şi $(x^2 + x + 1)(f(x) - f(1)) = f(x^3) - f(1)$. **2p**

Prin scădere, $(x + 1)f(x) = f(1)(x^2 + x) + f(0)(1 - x^2)$. **2p**

Pentru $x \neq -1$ rezultă $f(x) = ax + b$, cu $a = f(1) - f(0), b = f(0)$. **1p**

Luând, $x = 2, y = -1$ obţinem $f(-1) = -a + b$, deci formula precedentă este valabilă pentru orice x. **1p**

Se verifică imediat că orice funcţie de această formă convine. **1p**

Clasa a X-a - Soluţii şi bareme

Problema 1. Să se determine numerele complexe z cu proprietatea că

$$|z| + |z - 25| + |z - 18 - 24i| + |z + 7 - 24i| = 70.$$

Soluţie. Din inegalitatea modulului, avem

$$|z| + |z - 18 - 24i| \geqslant |18 + 24i| = 30 \tag{1}$$

şi

$$|z - 25| + |z + 7 - 24i| \geqslant |32 - 24i| = 40. \tag{2}$$

.... 2 puncte

Dacă $z \in \mathbb{C}$ verifică relaţia dată, rezultă că (1) şi (2) devin egalităţi.

. . . . 2 puncte

Fie O, A, B, C, M punctele din planul complex având afixele 0, 25, $18+24i$, $-7+24i$ şi z, respectiv. Rezultă din egalităţile (1) şi (2) că $MO+MB=30=OB$ şi $MA+MC=40=AC$.

. . . . 1 punct

Deducem că M este punctul de intersecţie a dreptelor AC şi OB.

. . . . 1 punct

Cum $OABC$ este paralelogram, obţinem $z=9+12i$.

. . . . 1 punct

Problema 2. Considerăm un punct M în interiorul paralelogramului $ABCD$. Să se arate că

$$MA\cdot MC+MB\cdot MD\geqslant AB\cdot AD.$$

Soluţie. Considerăm punctul N astfel încât $AMND$ să fie paralelogram.

. . . . 2 puncte

Rezultă că $BMNC$ este paralelogram.

. . . . 1 punct

Deoarece $MA=DN$ şi $MB=CN$, cerinţa devine $DN\cdot MC+MB\cdot CN\geqslant AB\cdot AD$.

. . . . 2 puncte

Inegalitatea cerută rezultă din inegalitatea lui Ptolemeu aplicată patrulaterului $MCND$.

. . . . 2 puncte

Problema 3. Un şir de numere reale $(a_n)_{n\geqslant 1}$ se numeşte *convex* dacă

$$2a_n\leqslant a_{n-1}+a_{n+1},\ \text{ oricare ar fi } n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2.$$

a. Să se dea un exemplu de şir convex neconstant.

b. Fie $(b_n)_{n\geqslant 1}$ un şir de numere reale pozitive astfel încât, oricare ar fi $a>0$, şirul $(a^n b_n)_{n\geqslant 1}$ să fie convex. Să se demonstreze că şirul $(\ln b_n)_{n\geqslant 1}$ este convex.

Soluţie. a. Şirul $a_n=2^n$, $n\geqslant 1$, verifică cerinţa.

. . . . 1 punct

b. Fixăm un număr natural n, $n\geqslant 2$. Din definiţia şirului convex rezultă că

$$2a^n b_n\leqslant a^{n-1}b_{n-1}+a^{n+1}b_{n+1},$$

oricare ar fi $a>0$, deci $2b_n\leqslant \dfrac{b_{n-1}}{a}+ab_{n+1}$.

. . . . 1 punct

Alegând $a=\sqrt{\dfrac{b_{n-1}}{b_{n+1}}}$ – valoarea pentru care expresia $\dfrac{b_{n-1}}{a}+ab_{n+1}$ este minimă –

. . . . 2 puncte

deducem că $b_n\leqslant b_{n-1}b_{n+1}$.

. . . . 2 puncte

Logaritmând, obţinem $2\ln b_n\leqslant \ln b_{n-1}+\ln b_{n+1}$. Cum n a fost ales arbitrar, cerinţa este demonstrată.

. . . . 1 punct

Problema 4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care verifică relaţia

$$f(f(n)) + f(n) = 6n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Soluţie. Pentru un $n \in \mathbb{N}$ fixat, notăm $b_1 = f(n)$ şi considerăm şirul $b_{k+1} = f(b_k)$, $k \in \mathbb{N}^*$. Relaţia dată se rescrie $b_{n+1} + b_{n+2} = 6b_n$,

. . . . 1 punct

deci $b_n = \alpha 2^n + \beta(-3)^n$, cu α, β constante reale.

. . . . 2 puncte

Deoarece $b_n \geqslant 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deducem $\beta = 0$,

. . . . 1 punct

iar $b_1 + b_2 = 6n$ duce la $\alpha = n$.

. . . . 2 puncte

Aceasta arată că $b_1 = 2n$, deci $f(n) = 2n, n \in \mathbb{N}$.

. . . . 1 punct

Clasa a XI-a - Soluţii şi bareme

Problema 1. Fie n un număr natural nenul şi fie A o matrice pătrată de ordin n cu elemente întregi, având proprietatea că $I_n + A + A^2 + \cdots + A^{10} = O_n$.

i) Să se arate că matricea $I_n + A + A^2$ este inversabilă.

ii) Să se arate că $\det(I_n + A + A^2) = 1$.

Soluţie. i) Înmulţind cu A^{11} relaţia din ipoteză, obţinem $A^{11} + A^{12} + \cdots + A^{21} = O_n$,

de unde rezultă

$$I_n + A + A^2 + \cdots + A^{21} = O_n.$$

Atunci

$$I_n + (I_n + A + A^2)(A + A^4 + A^7 + \cdots + A^{19}) = O_n,$$

deci matricea $I_n + A + A^2$ este inversabilă.

. . . . 4 puncte

ii) Deoarece A este matrice cu elemente întregi, rezultă că I_n+A+A^2, precum şi $A+A^4+A^7+\cdots+A^{19}$ sunt matrice cu elemente întregi, deci $\det(I_n+A+A^2) = \pm 1$.

. . . . 2 puncte

Cum $I_n + A + A^2 = (A - \varepsilon I_n)(A - \bar{\varepsilon} I_n)$, unde $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, avem

$$\det(I_n + A + A^2) = \det(A - \varepsilon I_n)\det(A - \bar{\varepsilon} I_n) = |\det(A - \varepsilon I_n)|^2 \geqslant 0.$$

Concluzia este evidentă.

. . . . 1 punct

Problema 2. Considerăm un şir $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale, strict descrescător şi convergent la 0, cu proprietatea că $a_{n+1} \leqslant \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$.

Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_{n+1} - a_n) = 0$.

Soluţie. Din inegalitatea $2a_{n+1} \leqslant a_n + a_{n+2}$ rezultă $a_{n+1} - a_n \leqslant a_{n+2} - a_{n+1}$, deci şirul $x_n \stackrel{\text{not}}{=} a_n - a_{n+1}$ este descrescător şi, evident, convergent la 0.

. . . . 1 punct

În plus, $x_1+x_2+\cdots+x_n = a_1-a_{n+1} < a_1$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty}(x_1+x_2+\cdots+x_n) = a_1$.

. . . . 2 puncte

Rezultă că pentru un $\varepsilon > 0$ există $N \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x_{N+1} + \cdots + x_n < \varepsilon$, oricare ar fi $n > N$.

.... 2 puncte

Cum $x_{N+1} > \cdots > x_n$, rezultă $(n-N)x_n < \varepsilon$.

.... 1 punct

Pentru $n > 2N$ avem $n - N > \frac{n}{2}$ şi apoi $0 < nx_n < 2\varepsilon$, oricare ar fi $n > N$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_{n+1} - a_n) = 0$.

.... 1 punct

Problema 3. Fie n un număr natural nenul. Să se arate că există numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel încât matricea

$$A_n = (\sin px_q)_{1\leqslant p,q\leqslant n} = \begin{pmatrix} \sin x_1 & \sin 2x_1 & \sin 3x_1 & \ldots & \sin nx_1 \\ \sin x_2 & \sin 2x_2 & \sin 3x_2 & \ldots & \sin nx_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin x_n & \sin 2x_n & \sin 3x_n & \ldots & \sin nx_n \end{pmatrix}$$

să fie nesingulară.

Soluţia 1. Demonstrăm prin inducţie după n. Pentru $n = 1$, alegem $x_1 \neq k\pi$. Presupunem că pentru un $n > 1$ avem numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ astfel încât matricea A_{n-1} să fie nesingulară.

Considerăm ecuaţia $z^n = i$, având rădăcinile distincte

$$z_k = \cos a_k + i \sin a_k,$$

unde

$$a_k = \frac{(4k+1)\pi}{2n}, k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

.... 2 puncte

Observăm că pentru $j = 1, 2, \ldots, n-1$ avem

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k^j = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} z_k^j\right) = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \sin ja_k = 0,$$

iar pentru $j = n$ avem

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k^n = ni \Rightarrow \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} z_k^n\right) = n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \sin na_k = n.$$

.... 2 puncte

Pentru fiecare $k = 0, 1, \ldots, n-1$, notăm cu Δ_k determinantul matricei obţinute din A_n înlocuind x_n cu a_k.

.... 1 punct

Deoarece primele $n-1$ linii ale determinanţilor Δ_k sunt aceleaşi, rezultă că

$$\Delta_0 + \Delta_1 + \cdots + \Delta_{n-1} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin x_1 & \sin 2x_1 & \sin 3x_1 & \ldots & \sin nx_1 \\ \sin x_2 & \sin 2x_2 & \sin 3x_2 & \ldots & \sin nx_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin x_{n-1} & \sin 2x_{n-1} & \sin 3x_{n-1} & \ldots & \sin nx_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{vmatrix} = n \det A_{n-1} \neq 0,$$

de unde rezultă că cel puţin unul dintre determinanţii Δ_k este nenul, ceea ce încheie demonstraţia.

.... 2 puncte

Soluţia 2. Demonstrăm prin inducţie după n. Pentru $n = 1$, alegem $x_1 \neq k\pi$. Presupunem că pentru un $n > 1$ avem numerele reale $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ astfel încât matricea A_{n-1} să fie nesingulară, şi presupunem prin absurd că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $\det A_n = 0$. Dezvoltând după ultima linie, obţinem

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

unde a_k este complementul algebric al elementului $\sin kx$, $k = 1, 2, \dots, n$. Observăm că $a_n = \det A_{n-1} \neq 0$.

.... 2 puncte

Derivând de două ori relaţia anterioară, obţinem

$$a_1 \sin x + 2^2 a_2 \sin 2x + \cdots + n^2 a_n \sin nx = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Continuând analog, obţinem

$$a_1 \sin x + 2^4 a_2 \sin 2x + \cdots + n^4 a_n \sin nx = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

...

$$a_1 \sin x + 2^{2n-2} a_2 \sin 2x + \cdots + n^{2n-2} a_n \sin nx = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

.... 2 puncte

Privind aceste n identităţi ca un sistem omogen de n ecuaţii liniare cu necunoscutele $a_1, a_2, \dots, a_n$, din $a_n \neq 0$ rezultă că determinantul sistemului este nul.

.... 1 punct

Însă deteminantul sistemului este egal cu $\sin x \sin 2x \cdots \sin nx \cdot \mathrm{V}(1, 2^2, 3^2, \dots, n^2)$, unde $\mathrm{V}(1, 2^2, 3^2, \dots, n^2)$ reprezintă determinantul Vandermonde asociat numerelor $1, 2^2, 3^2, \dots, n^2$. Acest determinant este nenul.

.... 1 punct

Alegând $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sin x \sin 2x \cdots \sin nx \neq 0$ – de exemplu $x = \frac{1}{n}$ – obţinem o contradicţie.

.... 1 punct

Problema 4. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare şi convexă, cu proprietatea că $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - x) = 0$. Să se demonstreze că pentru orice număr $x \in [0, \infty)$ avem

$$2x \leqslant f(f(2x)) \leqslant 2f(x).$$

Soluţie. Vom arăta că pentru orice a, b cu $0 \leqslant a < b$ avem

$$f(b) - f(a) \leqslant b - a. \tag{3}$$

Să presupunem prin absurd că există a, b cu $0 \leqslant a < b$ astfel încât $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > 1$, şi fie $x > b$ arbitrar. Din convexitatea funcţiei f avem

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \overset{\text{not}}{=} m > 1.$$

.... 2 puncte

Atunci $f(x) > m(x-a) + f(a)$, de unde $f(x) - x > (m-1)x - am + f(a)$. Trecând la limită către $+\infty$ rezultă $0 \geqslant +\infty$, contradicţie.

.... 1 punct

Vom arăta că pentru orice număr a pozitiv avem $f(a) \geqslant a$. Să presupunem prin absurd că există un număr a pozitiv astfel încât $f(a) < a$, şi fie $x > a$ arbitrar. Cum $f(x) - x < f(a) - a$, trecând la limită către $+\infty$ rezultă $0 \leqslant f(a) - a < 0$, contradicţie.

.... 1 punct

Atunci $f(f(2x)) \geqslant f(2x) \geqslant 2x$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.

.... 1 punct

Pentru $b - a = h > 0$, inegalitatea (1) devine $f(x+h) \leqslant f(x) + h, \forall x \geqslant 0$. Pentru $h = x$ obţinem $f(2x) \leqslant f(x) + x$. Din monotonia funcţiei f rezultă $f(f(2x)) \leqslant f(f(x) + x))$. Aplicând inegalitatea (1) pentru $h = f(x)$, unde $h > 0$, deducem că $f(f(x) + x) \leqslant f(x) + f(x) = 2f(x)$, deci $f(f(2x)) \leqslant 2f(x)$, ceea ce încheie demonstraţia.

.... 2 puncte

Clasa a XII-a - Soluţii şi bareme

Problema 1. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe orice interval $[a, b] \subset I$. Să se arate că mulţimea

$$A = \left\{ \int_x^y f(t)dt \mid x, y \in I \right\}$$

este un interval, eventual degenerat.

Soluţie. Pentru $x = y$ rezultă că $0 \in A$.

.... 1 punct

Dacă $A = \{0\}$, cerinţa este demonstrată. În caz contrar, fie $u, v \in A$ cu $u < v$. Rezultă că există $a, b, c, d \in I$ astfel încât

$$u = \int_a^b f(t)dt, \quad v = \int_c^d f(t)dt.$$

.... 1 punct

Fie $\gamma \in (u, v)$ şi funcţia continuă $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \displaystyle\int_{ax+c(1-x)}^{bx+d(1-x)} f(t)dt$. Funcţia este bine definită, deoarece $ax + c(1-x), bx + d(1-x) \in I$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$.

.... 2 puncte

Cum $g(0) = \displaystyle\int_c^d f(t)dt = v$ şi $g(1) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt = u$, conform proprietăţii lui Darboux există $\alpha \in (0, 1)$ astfel încât $g(\alpha) = \gamma$.

.... 2 puncte

Deoarece $\gamma = \displaystyle\int_{a\alpha+c(1-\alpha)}^{b\alpha+d(1-\alpha)} f(t)dt \in A$, rezultă că A este un interval, ceea ce trebuia demonstrat.

.... 1 punct

Problema 2. Fie p un număr prim, $p > 2$. Să se arate că polinomul cu coeficienţi întregi

$$f = (X-1)(X-2)\cdots(X-p) + X + p$$

este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

Soluţie. Presupunem că există polinoamele $g, h \in \mathbb{Z}[X]$ cu $f = gh$ şi $\operatorname{grad} g = n \geqslant 1$, $\operatorname{grad} h = m \geqslant 1$. Deoarece f este monic, rezultă că g şi h sunt monice.

....1 punct

În inelul $\mathbb{Z}_p[X]$, egalitatea $f = gh$ devine $\hat{f} = \hat{g}\hat{h}$.

....2 puncte

Cum $\hat{f} = X(X - \hat{1})(X - \hat{2}) \cdots (X - \widehat{p-1}) + X = X^p - X + X = X^p$ şi $\operatorname{grad} \hat{g} = n$, $\operatorname{grad} \hat{h} = m$, rezultă că $\hat{g} = X^n$ şi $\hat{h} = X^m$.

....1 punct

Obţinem $g = X^n + pg_1$, $h = X^m + ph_1$, unde g_1, h_1 sunt polinoame cu coeficienţi întregi.

....1 punct

Deoarece $p - p! = f(0) = p^2 g_1(0) h_1(0)$, avem $p^2 \mid p - p!$, de unde $p \mid 1 - (p-1)!$. Conform teoremei lui Wilson, $p \mid 1 + (p-1)!$, ceea ce implică $p \mid 2$, contradicţie.

....2 puncte

Comentariu. Ireductibilitatea lui f poate fi stabilită cu ajutorul criteriului lui Eisenstein.

Problema 3. Se consideră funcţia continuă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

1. $f(0) < 0 < f(1)$;
2. Există un unic număr $c \in (0,1)$ pentru care $f(c) = 0$;
3. $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \geqslant \int_0^1 xf(x)dx$.

Să se demonstreze că pentru orice număr n natural nenul avem $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx > 0$.

Soluţie. Deoearece funcţia f nu se anulează pe $[0,c)$ şi nici pe $(c,1]$, rezultă că

$$f(x) < 0,\, x \in [0,c) \quad \text{şi} \quad f(x) > 0,\, x \in (c,1].$$

....1 punct

Prin urmare, $(x^n - c^n)(1-x)f(x) \geqslant 0$, pentru orice $x \in [0,1]$, cu egalitate numai pentru $x = c$ şi $x = 1$.

....2 puncte

Atunci $\displaystyle\int_0^1 (x^n - c^n)(1-x)f(x)dx > 0$, deci

$$\int_0^1 (x^n - x^{n+1})f(x)dx > c^n \int_0^1 (1-x)f(x)dx \geqslant 0,$$

de unde rezultă că şirul $\left(\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx\right)_{n\geqslant 1}$ este strict descrescător.

....2 puncte

Pe de altă parte, $\left|\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx\right| \leqslant \dfrac{M}{n+1}$, unde $M = \max\{f(x) \mid x \in [0,1]\}$.

Rezultă că $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx = 0$, de unde obţinem cerinţa.

....2 puncte

Problema 4. Fie A un inel finit cu proprietăţile:

i) Orice divizor al lui zero este element nilpotent;

ii) Numărul elementelor inversabile din A şi numărul automorfismelor lui A sunt relativ prime.

Să se arate că:

1° Pentru orice element inversabil $a \in A$, funcţia $f_a : A \to A$, $f_a(x) = axa^{-1}$ este un automorfism al inelului A;

2° Inelul A este comutativ.

Soluţie. 1° Avem

$$f_a(x+y) = a(x+y)a^{-1} = axa^{-1} + aya^{-1} = f_a(x) + f_a(y)$$

şi

$$f_a(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = f_a(x)f_a(y),$$

pentru orice $x, y \in A$, adică f_a este endomorfism al inelului A.

....1 punct

Cum $f_a \circ f_{a^{-1}} = f_{a^{-1}} \circ f_a = 1_A$, rezultă că f_a este bijectivă, deci f_a este automorfism al inelului A.

....1 punct

2° Notăm cu n numărul elementelor inversabile ale inelului A şi cu m numărul automorfismelor lui A. Fie a un element inversabil şi q ordinul său în grupul $(U(A), \cdot)$; avem $q \mid n$. Atunci

$$f_a^q(x) = a^q x a^{-q} = x,$$

pentru orice $x \in A$, cu alte cuvinte $f_a^q = 1_A$.

....1 punct

Fie p ordinul lui f_a în grupul $(\mathrm{Aut}(A), \circ)$. Rezultă că $p \mid q$, deci $p \mid n$. Cum $p \mid m$, obţinem $p = 1$, deci $f_a = 1_A$. Prin urmare $ax = xa$, pentru orice $x \in A$, adică

$$a \in Z(A).$$

....2 puncte

Fie b un element nenul şi neinversabil. Cum A este inel finit, rezultă că b este un divizor al lui 0, deci, conform ipotezei, b este nilpotent. Atunci $b+1$ este element inversabil, de unde $b+1 \in Z(A)$, deci

$$b \in Z(A).$$

Cum $0 \in Z(A)$, cerinţa este demonstrată.

....2 puncte