Concursul Naţional de Matematică ,,Alexandru Myller"
Ediţia a VIII-a, 8 aprilie 2010
Barem de corectare şi notare, clasa a VIII-a

1. Fie x şi y două numere reale cu proprietatea că $x+y \geq 2$.

Arătaţi că $x^3+y^3 \geq x+y$. Pentru care valori ale numerelor x şi y are loc egalitatea?

Soluţie. Inegalitatea $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right) \geq x+y$ este echivalentă cu $x^2-xy+y^2 \geq 1$ **2p**

Înmulţind cu 2, se obţine $(x-y)^2+x^2+y^2 \geq 2$ **1p**

Cum $x^2+y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \geq 2$ şi $(x-y)^2 \geq 0$, rezultă concluzia. **3p**

Egalitatea se realizează pentru $x=y=1$. **1p**

2. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful V are latura bazei egală cu 6 cm, înălţimea egală cu $\sqrt{6}$cm. Planul perpendicular în punctul C pe dreapta AC intersectează dreapta AV în punctul P. Calculaţi distanţa de la punctul P la planul (VBC).

Soluţie. Feţele laterale ale piramidei sunt triunghiuri dreptunghice isoscele, de catetă $3\sqrt{2}$ cm. În plus, $AV \perp (VBC)$ **3p**

Fie O centrul bazei piramidei. Planul perpendicular pe dreapta AC în punctul C intersectează dreapta AO în punctul Q. Deoarece $QC \perp AC$, rezultă că punctul O este mijlocul segmentului $[AQ]$. Cum $VO || PQ$, rezultă că V este mijlocul segmentului $[AP]$ **3p**

Distanţa de la P la planul (VBC) este egală cu $PV=VA=3\sqrt{2}$ cm .. **1p**

3. Fie mulţimea $A=\{1,2,3,...,37\}$. Să se arate că, oricum am considera 13 elemente diferite din A, există două printre acestea, a şi b, cu proprietatea că $\frac{4}{5}<\frac{a}{b}<\frac{5}{4}$.

Soluţie. Ordonăm crescător cele 13 numere: $1 \leq a_1<a_2<\cdots<a_{13} \leq 37$. Atunci $\frac{a_{i+1}}{a_i}>1>\frac{4}{5}$, oricare ar fi i. **2p**

Presupunem că $\frac{a_{i+1}}{a_i} \geq \frac{5}{4}$, oricare ar fi i **1p**

Obţinem: $a_2 \geq a_1 \cdot \frac{5}{4}$, deci $a_2 \geq 2$; $a_3 \geq a_2 \cdot \frac{5}{4}$, deci $a_3 \geq 3$.

Continuând estimările pentru următoarele numere, obţinem, în cele din urmă, $a_{13} \geq a_{12} \cdot \frac{5}{4}>37$ **3p**,

deci $a_{13} \geq 38$, contradicţie. Rezultă concluzia. **1p**

4. Fie $p \geq 2$ un număr prim. Să se arate că orice număr natural nenul admite un multiplu de forma $p^{2a}-p^a$ unde $a \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie. Fie $A \in \mathbb{N}^*$, $A=p^x q$, unde $x, q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $p \not| q$. **1p**

Două dintre numerele $p-1, p^2-1, p^3-1, \ldots, p^{q+1}-1$ dau acelaşi rest la împărţirea cu q (principiul cutiei); fie acestea p^i-1 şi p^j-1, unde $i<j$. Diferenţa lor este divizibilă cu q, deci există $k:=j-i$ astfel încât $q | p^k-1$. **3p**

Cum $p^{nk}-1=(p^k-1)(p^{(n-1)k}+p^{(n-2)k}+\ldots+p^k+1)$, deducem că $q | p^{nk}-1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ **2p**

Luând $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $n_0 k>x$, rezultă că $p^{2n_0k}-p^{n_0k}=p^{n_0k}(p^{n_0k}-1)$ este multiplu de a. **1p**