CONCURSUL MYLLER 2010
CLASA a IX-a – soluţii

1. Să se arate că, pentru orice număr real $x \geq \dfrac{25}{2}$, intervalul $[x, 2x]$ conţine trei întregi distincţi în progresie geometrică.

Soluţie. Dacă $x \in [25/2; 16]$ atunci $[x, 2x]$ conţine progresia $16, 20, 25$, dacă $x \in [16; 18]$ atunci $[x, 2x]$ conţine progresia $18, 24, 32$, iar în cazul când $x \in [18; 25]$, $[x, 2x]$ conţine progresia $25, 30, 36$ **3p**

Apoi, deoarece $(n+2)^2 < 2n^2$ pentru $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$, deducem că, dacă $x \geq 25$, atunci $n^2 \leq x \leq (n+1)^2$ cu $n \geq 5$, $2x > (n+2)^2$ şi $[x, 2x]$ conţine întregii în progresie geometrică $(n+1)^2, (n+1)(n+2), (n+2)^2$ **4p**

2. Se consideră o mulţime A cu $n \geq 2$ elemente şi 2^{n-1} submulţimi distincte ale lui A. Se ştie că oricare trei dintre aceste submulţimi au intersecţia nevidă. Să se arate că intersecţia tuturor submulţimilor date este nevidă.

Soluţie. Fie A mulţimea şi $\mathcal{A}$ mulţimea submulţimilor date. Din ipoteză reiese că $\mathcal{A}$ conţine exact câte un element al fiecăreia dintre cele 2^{n-1} perechi de forma $(X, A \setminus X)$, $X \subset A$ **2p**

Astfel, dacă $X, Y \in \mathcal{A}$, atunci $X \cap Y \in \mathcal{A}$, deoarece intersecţia mulţimilor $X, Y, A \setminus (X \cap Y)$ este vidă **2p**

Aceasta arată că dacă $X \in \mathcal{A}$ are $k \geq 2$ elemente şi $Y \subset X$, $Y \neq X$, $Y \neq \emptyset$, atunci $\mathcal{A}$ conţine una dintre mulţimile Y sau $X \setminus Y$, deci $\mathcal{A}$ conţine şi o mulţime (nevidă) cu mai puţin de k elemente. Deducem inductiv că $\mathcal{A}$ conţine o mulţime cu un singur element a, deci toate mulţimile din $\mathcal{A}$ îl conţin pe a **3p**

3. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi o mulţime $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de numere reale cu proprietatea $|x_i - x_j| \geq 1$ pentru orice $1 \leq i < j \leq n$.

Să se arate că $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq \dfrac{n(n-1)(n+1)}{12}$.

Soluţie. Putem presupune $x_1 < x_2 < \ldots < x_k < 0 \leq x_{k+1} < \ldots < x_n$, datorită simetriei enunţului **1p**

Rezultă $x_{k+j} \geq x_{k+1} + j - 1 \geq 0$ pentru $1 \leq j \leq n-k$ şi $x_{k-i} \leq x_k - i < 0$ pentru $0 \leq i \leq k-1$, deci $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} x_p^2 \geq \sum_{j=1}^{n-k} (x_{k+1} + j - 1)^2 + \sum_{i=0}^{k-1} (x_k - i)^2$ ...**2p**

În cazul $x_k \leq -1$, suma este cel puţin

$$\sum_{j=1}^{n-k}(j-1)^2 + \sum_{i=0}^{k-1}(i+1)^2 = \frac{1}{6}\big((n-k-1)(n-k)(2n-2k-1) + k(k+1)(2k+1)\big) =$$

$$= \frac{1}{6}\big(6nk^2 - 6nk(n-1) + 2n^3 - 3n^2 + n\big) \geq \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{4}6n(n-1)^2 + 2n^3 - 3n^2 + n\right) =$$

$= \dfrac{1}{12}n(n-1)(n+1)$, deoarece minimul funcţiei de gradul al doilea se atinge pentru $k = \dfrac{n-1}{2}$ **2p**

În cazul $x_k \in (-1;0)$, $x_{k+1} \geq x_k + 1 > 0$ şi suma este cel puţin

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-k}(x_k+j)^2 + \sum_{i=0}^{k-1}(x_k-i)^2 &= nx_k^2 + x_k\big((n-k)(n-k+1) - k(k-1)\big)\\ &+ \frac{1}{6}\big((n-k)(n-k+1)(2n-2k+1) + k(k-1)(2k-1)\big)\\ &= n(x_k^2 + nx_k - 2kx_k + x_k + k^2 - nk - k) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= n\left(\big(x_k - k + \frac{n+1}{2}\big)^2 - \frac{(n+1)^2}{4}\right) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &\geq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)(n-1)}{12}\text{.......}\ \mathbf{2p}\end{aligned}$$

4. Fie $M \in (BC)$, $N \in (AC)$, $P \in (AB)$ picioarele a trei ceviene concurente în triunghiul ABC. Paralela prin N la AB taie dreapta PM în E, paralela prin M la AB taie dreapta PN în F, iar dreptele MN şi CP se taie în T.

a) Să se arate că $\dfrac{NT}{TM} = \dfrac{BC}{AC} \cdot \dfrac{AN}{BM}$.

b) Să se arate că dreptele MN, EF şi PC sunt concurente.

Soluţie. a) Fie S punctul de concurenţă al cevienelor. Aplicând teorema lui Menelaus în ΔNBM cu transversala $S - T - C$ şi în ΔBAN, cu transversala $P - S - C$, precum şi teorema lui Ceva în ΔABC obţinem

$$\frac{NT}{TM} = \frac{BC}{MC}\cdot\frac{NS}{BS} = \frac{BC}{MC}\cdot\frac{NC}{AC}\cdot\frac{AP}{PB} = \frac{BC}{AC}\cdot\frac{AN}{BM}\text{.........}\ \mathbf{4p}$$

b) Dacă $MN||BC$, concluzia este evidentă **1p**

În caz contrar, fie $\{U\} = EF \cap MN$, $\{Q\} = NE \cap BC$. Din asemănări de triunghiuri obţinem

$$\frac{NU}{UM} = \frac{NE}{MF} = \frac{PE}{PM} = \frac{BQ}{BM} = \frac{\frac{AN\cdot BC}{AC}}{BM} = \frac{BC}{AC}\cdot\frac{AN}{BM},$$

deci T şi U împart (MN) în acelaşi raport **2p**