CLASA a XII-a -soluţii

Problema 1. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă cu proprietatea că pentru orice $x \in [a, b)$, există $y \in (x, b)$ astfel încât $\displaystyle\int_x^y f(t)dt > 0$. Arătaţi că $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$.

Călin Popescu

Soluţie. Fie $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Deoarece f este integrabilă, rezultă că F este continuă.

....**2 puncte**

Notăm $A \subset [a, b]$ mulţimea punctelor de maxim global ale lui F, care este nevidă, conform teoremei lui Weierstrass.

....**1 punct**

Fie $c \in A$. Dacă $c < b$, atunci din ipoteză există $y \in (c, b)$ astfel încât $F(y) - F(c) = \displaystyle\int_c^y f(t)dt > 0$, deci $F(y) > F(c)$, fals.

....**2 puncte**

Deoarece A este nevidă şi $A \cap [a, b) = \emptyset$ rezultă că $A = \{b\}$.

....**1 punct**

Obţinem $F(b) > F(a) = 0$, deci $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$.

....**1 punct**

Notă. Problema rămâne adevărată dacă ambele inegalităţi sunt nestricte.

Problema 2. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare. Arătaţi că:

$$\int_0^x (2t - x)f(t)dt \geq 0, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Marian Andronache

Soluţie. Pentru $x = 0$ inegalitatea este evidentă. Fie $x > 0$ şi $t, y \in [0, x]$. Atunci, cum f este crescătoare, rezultă că $(f(t) - f(y))(t - y) \geq 0$, deci

$$tf(t) + yf(y) \geq tf(y) + yf(t).$$

....**2 puncte**

Pentru y fixat, integrând inegalitatea precedentă în funcţie de t pe $[0, x]$, obţinem:

$$\int_0^x tf(t)dt + yf(y)x \geq f(y)\frac{x^2}{2} + y\int_0^x f(t)dt.$$

. . . . **2 puncte**

Deoarece inegalitatea precedentă este adevărată pentru orice $y \in [0,x]$, prin integrare în funcţie de y pe $[0,x]$, obţinem:

$$x\int_0^x tf(t)dt + x\int_0^x yf(y)dt \geq \frac{x^2}{2}\int_0^x f(y)dy + \frac{x^2}{2}\int_0^x f(t)dt.$$

. . . . **2 puncte**

Rezultă că $2x\displaystyle\int_0^x tf(t)dt \geq x^2\int_0^x f(t)dt$, deci $\int_0^x (2t-x)f(t)dt \geq 0$.

. . . . **1 punct**

Problema 3. Fie n un număr natural, $n \geq 2$, şi $G \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ un grup cu n elemente în raport cu înmulţirea matricelor, cu proprietatea că $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$, oricare ar fi $A, B \in G$. Arătaţi că:

a) Elementul neutru al lui G este diferit de I_3.

b) G este izomorf cu grupul $(U_n, \cdot)$ al rădăcinilor complexe de ordinul n ale unităţii.

Dinu Şerbănescu

Soluţie. a) Dacă E este elementul neutru al lui G, atunci $E \cdot E = E$, de unde $\mathrm{tr}(E) = \mathrm{tr}(E \cdot E) = \mathrm{tr}^2(E)$. Rezultă că $\mathrm{tr}(E) \in \{0,1\}$, deci $\mathrm{tr}(E) \neq 3 = \mathrm{tr}(I_3)$. Atunci $E \neq I_3$.

. . . . **2 puncte**

b) Din $E \cdot E = E$ şi $E \neq I_3$ rezultă $\det(E) = 0$. Fie $A \in G$. Cum $A^n = E$ obţinem $\det^n(A) = \det(E) = 0$, deci $\det(A) = 0$.

. . . . **1 punct**

Fie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale lui A. Cum $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}^2(A)$, rezultă că $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2$, deci $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3 = 0$.

. . . . **1 punct**

Deoarece $\det(A) = 0$, rezultă că polinomul caracteristic al lui A este $X^3 - \mathrm{tr}(A) \cdot X^2$, deci $A^3 = \mathrm{tr}(A) \cdot A^2$. Prin înmulţirea cu simetrica lui A^2 din G obţinem $A = \mathrm{tr}(A) \cdot E$.

. . . . **1 punct**

Dacă $O_3 \in G$ atunci $O_3 \cdot O_3' = E$, deci $A = O_3$, oricare ar fi $A \in G$, fals. Prin urmare $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, oricare ar fi $A \in G$.

. . . . **1 punct**

Fie $F : G \to \mathbb{C}^*$, $F(A) = \mathrm{tr}(A)$. Cum $F(AB) = F(A)F(B)$ şi $F(A) = F(B) \Rightarrow \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) \Rightarrow \mathrm{tr}(A) \cdot E = \mathrm{tr}(B) \cdot E \Rightarrow A = B$, deci F este morfism injectiv de grupuri. Atunci G este izomorf cu $\mathrm{Im}(G)$, care este subgrup în $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ cu n elemente, deci egal cu U_n.

. . . . **1 punct**

Notă. Problema rămâne adevărată pentru orice grup de matrice cu elemente complexe de ordin m, $m \geq 2$.

Problema 4. Fie A un inel finit comutativ cu cel puţin trei elemente şi $a = \sum_{x \in A} x^7$, $b = \sum_{x \in A} x^8$. Arătaţi că cel puţin unul dintre elementele a şi b este neinversabil.

Marian Andronache

Soluţie. Presupunem prin absurd că a şi b sunt inversabile. Fie $c \in A$ un element inversabil. Deoarece funcţia $f : A \to A$, $f(x) = cx$ este injectivă, rezultă că f este bijectivă şi obţinem:

$$c^7 a = c^7 \sum_{x \in A} x^7 = \sum_{x \in A} c^7 x^7 = \sum_{x \in A} (cx)^7 = a,$$

şi analog $b = c^8 b$.

.... **2 puncte**

Cum a şi b sunt inversabile, rezultă că $c^7 = c^8 = 1$, deci $c = 1$.

.... **1 punct**

Deoarece 1 este singurul element inversabil al lui A şi -1 este inversabil, rezultă că $1 = -1$, deci $2x = 0$, oricare ar fi $x \in A$. Prin urmare, conform teoremei lui Cauchy, A are 2^n elemente, $n \geq 2$.

.... **1 punct**

Funcţia $g : A \to A$, $g(x) = x^8$ este injectivă deoarece $g(x) = g(y) \Rightarrow x^8 - y^8 = 0 \Rightarrow (x - y)^8 = 0 \Rightarrow 1 - (x - y)^8 = 1 \Rightarrow 1 - (x - y)$ este inversabil, deci $x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

.... **1 punct**

Atunci, cum g este bijectivă, rezultă că $\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in A} x^8 = 1$.

.... **1 punct**

Dar suma elementelor într-un $2-$grup elementar cu cel puţin patru elemente este nulă (prin inducţie după exponentul lui 2 sau privind grupul $(A, +)$ ca $\mathbb{Z}_2-$spaţiu vectorial), contradicţie.

.... **1 punct**

Comentariu. Un exemplu în care una dintre sume este inversabilă este $A = F_8$.

Notă. Problema rămâne adevărată înlocuind 7 şi 8 cu orice două numere naturale prime între ele, cu o demonstraţie mai elaborată.