CLASA a XI-a - soluţii

Problema 1. Daţi un exemplu de funcţie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ cu proprietatea că

$$f(f(f(f(x)))) = \frac{41x + 40}{40x + 41}, \text{ pentru orice } x > 0.$$

Soluţie. Căutăm o funcţie de forma $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, cu a, b, c, $d \in \mathbb{R}$.

....**3 puncte**

Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci iterata de ordin n a lui f este $f^{[n]}(x) = \dfrac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n}$.

....**2 puncte**

Rămâne de rezolvat ecuaţia $A^4 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 40 \\ 40 & 41 \end{pmatrix}$.

....**1 punct**

O soluţie este $a = d = 2$, $b = c = 1$, adică $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 2}$.

....**1 punct**

Problema 2. Fie A şi B două matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că AB este nilpotentă şi $ABA \neq O_n$. Arătaţi că există o matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $ABAC = O_n$ şi $AC \neq O_n$.

Soluţie. Fie m cel mai mic număr natural cu proprietatea că $(AB)^m = O_n$. Deoarece $ABA \neq O_n$, rezultă că $m > 1$ şi $(AB)^{m-1} \neq O_n$.

....**2 puncte**

Dacă $A(BA)^{m-1} \neq O_n$, matricea $C = (BA)^{m-1}$ satisface cerinţa, deoarece $ABAC = (AB)^m A = O_n$, însă $AC = A(BA)^{m-1} \neq O_n$.

....**2 puncte**

Dacă $A(BA)^{m-1} = O_n$, cum $ABA \neq O_n$, rezultă $m > 2$. Atunci $ABA(BA)^{m-2} = O_n$ şi $A(BA)^{m-2} \neq O_n$, altfel $(AB)^{m-1} = O_n$, ceea ce ar contrazice minimalitatea lui m.

....**1 punct**

Considerăm $C = (BA)^{m-2}$. Cum $ABAC = A(BA)^{m-1} = O_n$ şi $AC = A(BA)^{m-2} \neq O_n$, soluţia este încheiată.

....**2 puncte**

Problema 3. Determinaţi funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $2f(x + 1) = f(x) + 4f(2x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Dinu Şerbănescu

Soluţie. Fie $x \in \mathbb{R}$ şi $a > 2$ astfel încât $x \in [-a, a]$.

....**2 puncte**

Conform teoremei lui Weierstrass, funcţia $|f|$ are pe $[-a, a]$ un punct de maxim c.

....**2 puncte**

Cum $\frac{c}{2} \in [-a, a]$ şi $\frac{c}{2} + 1 \in [-a, a]$, rezultă că

$$|f(c)| = \left|\frac{1}{2}f\left(\frac{c}{2}+1\right) - \frac{1}{4}f\left(\frac{c}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}|f(c)| + \frac{1}{4}|f(c)| = \frac{3}{4}|f(c)|,$$

....**2 puncte**

de unde $f(c) = 0$, adică f este funcţia identic nulă pe $[-a, a]$; în particular $f(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

....**1 punct**

Problema 4. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie având proprietatea lui Darboux, astfel încât pentru orice $a \in \mathbb{R}$, ecuaţia $f(x) = a$ are un număr finit de soluţii. Arătaţi că funcţia f are limită la infinit.

Dinu Şerbănescu

Soluţie. Presupunem că există un şir $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n > 0$, strict crescător şi nemărginit, pentru care şirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ nu are limită. Fie $a < b$ două puncte limită ale şirului $(f(x_n))_{n\geq 1}$ şi $\varepsilon > 0$, $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + \varepsilon < c < b - \varepsilon$.

....**1 punct**

Fie $(y_n)_{n\geq 1}$ şi $(z_n)_{n\geq 1}$ două subşiruri ale lui $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $f(y_n) < a + \varepsilon$ şi $f(z_n) > b - \varepsilon$, oricare ar fi $n \geq 1$.

....**2 puncte**

Fie $n \geq 1$. Cum $f(y_n) < c < f(z_n)$, există t_n între y_n şi z_n astfel încât $f(t_n) = c$.

....**2 puncte**

Alegem $m \geq n$ astfel încât $\min\{y_m, z_m\} > \max\{y_n, z_n\}$. Analog există t_m între y_m şi z_m astfel încât $f(t_m) = c$. Cum $t_m > t_n$, ecuaţia $f(x) = c$ are o infinitate de soluţii, contradicţie.

....**1 punct**

Rezulă că pentru orice şir $(x_n)_{n\geq 1}$ strict crescător şi nemărginit, şirul $(f(x_n))_{n\geq 1}$ are limită. Prin urmare f are limită la infinit.

....**1 punct**