Concursul Naţional de Matematică ,,Alexandru Myller"
Ediţia a VIII-a, 8 aprilie 2010
Barem de corectare şi notare, clasa a VII-a

1. Fie x şi y două numere reale cu proprietatea că $x+y\geq 2$.
Arătaţi că $x^2+y^2\geq x+y$. Când are loc egalitatea?

Soluţie. Observăm că cel puţin unul dintre numerele x sau y este mai mare sau egal cu 1 .... **1p**

Dacă $x,y\geq 1$, concluzia este evidentă. În caz contrar, fie $x=1+a, a\geq 0$ şi $y=1-b, b\geq 0$. Deducem că $a\geq b$ **2p**

Au loc relaţiile
$x^2+y^2-(x+y)=(1+a)^2+(1-b)^2-(2+a-b)=a^2+b^2+(a-b)$.... **2p**

Deci, $x^2+y^2\geq x+y$ **1p**

Egalitatea are loc atunci când $a=b=0$, deci pentru $a=b=1$. **1p**

2. Să se determine numerele prime a, b, c şi A, ştiind că $A=a^4+b^4+c^4-3$.

Soluţie. Numerele a, b şi c nu pot fi toate impare **1p**

Dacă, de exemplu, $c=2$, atunci numărul $A=a^4+b^4+13$ trebuie să fie prim **1p**

Dacă a şi b sunt diferite de 5, atunci ultima cifră a numerelor a^4 şi b^4 este 1, deci numărul A se divide cu 5 - fals **2p**

Deducem că unul dintre numerele a sau b este egal cu 5, de exemplu $b=5$. Numărul $A=a^4+638$ trebuie să fie prim **1p**

Dacă $a\neq 3$, atunci $a^4=\mathcal{M}3+1$, deci $3|A$, fals **1p**

Deci $a=3$ şi $A=719$ care este număr prim **1p**

3. Fie $a_1,a_2,\ldots,a_{2010}\in\{-1,0,1\}$, astfel încât $a_1+a_2+\ldots+a_{2010}=1$.

a) Calculaţi $a_1^3+a_2^3+\ldots+a_{2010}^3$.

b) Determinaţi numărul de valori diferite pe care le poate lua suma
$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{2010}^2.$$

Soluţie. a) Deoarece $a_i^3=a_i$, oricare ar fi $i=1,2,3,\ldots,2010$, rezultă că $a_1^3+a_2^3+\ldots+a_{2010}^3$ **3p**

b) Suma $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{2010}^2$ are numai valori impare pozitive. Rezultă că valorile acestei sume fac parte din mulţimea $\{1,3,5,\ldots,2009\}$ **2p**

Fiecare dintre elementele mulţimii precedente se poate obţine: dacă $2n+1$ este un număr din $\{1,3,\ldots,2009\}$, luăm $a_1=a_2=\cdots=a_{n+1}=1$, $a_{n+2}=a_{n+3}=\cdots=a_{2n+1}=-1$ şi fiecare din celelalte numere egale cu 0 .... **2p**

4. Se consideră triunghiul ABC în care $AB=AC$ şi M este mijlocul segmentului BC. Punctele D şi E sunt picioarele perpendicularelor din M pe dreptele AC, respectiv AB, iar H este mijlocul segmentului $[DE]$. Fie punctele $P,Q\in BC$ astfel încât $MQ=MP=MD$ şi $P\in(BM)$. Arătaţi că punctul H este ortocentrul triunghiului APQ.

Soluţia 1.

Avem: $\operatorname{tg}(\angle HQM)=\dfrac{HM}{HQ}=\dfrac{HM}{MD}=\sin(\angle HDM)=\sin(\angle MAD)$ **2p**

Dar $\sin(\angle MAD)=\dfrac{MD}{MA}=\dfrac{MQ}{MA}=\operatorname{tg}(\angle MAQ)$ **2p**,
deci $\angle HQM\equiv\angle MAQ\equiv\angle MAP$ **1p**

Rezultă $QH\perp AP$. Cum $H\in AM$ şi $AM\perp BC$, reiese concluzia. **2p**

Soluţia 2. Este adevărată egalitatea $\dfrac{MQ}{AM}=\dfrac{HM}{MQ}$, întrucât ea revine la $MD^2=AM\cdot HM$, adică la teorema catetei în triunghiul DAM **3p**

Atunci triunghiurile MAQ şi MQH sunt asemenea **1p**
şi soluţia continuă ca mai sus . . . . **1p+2p**