CLASA A X-a

Problema 1. Dacă $x, y \in (1, 2]$, demonstraţi că

$$\log_x(3y - 2) + \log_y(3x - 2) \geq 4.$$

Radu Sava

Barem.

Cum $x \in (1, 2]$, atunci $(x - 1)(2 - x) \geq 0$, de unde $3x - 2 \geq x^2$. Analog se arată că $3y - 2 \geq y^2$. .... 3 puncte

Baza fiind supraunitară, obţinem că $\log_x(3y - 2) \geq \log_x y^2 = 2\log_x y$, iar $\log_y(3x - 2) \geq \log_y x^2 = 2\log_y x$ .... 2 puncte

Întrucât $\log_x y > 0$, $\log_y x > 0$, putem aplica inegalitatea mediilor:

$$\log_x y + \log_y x \geq 2\sqrt{\log_x y \log_y x} = 2,$$

de unde concluzia problemei. .... 2 puncte

Problema 2. Dacă z este un număr complex de modul 1, arătaţi că

$$\sqrt{3} \leq |1 + z| + |1 - z + z^2| \leq \frac{13}{4}.$$

Când se realizează egalităţile?

***

Barem.

Varianta 1. Dacă $t = |1 + z|$, atunci $t \in [0, 2]$ şi $t^2 = |1 + z|^2 = (1 + z)(1 + \bar{z}) = 2 + z + \bar{z}$, deci $z + \bar{z} = t^2 - 2$. Rezultă că $|1 - z + z^2|^2 = (1 - z + z^2)(1 - \bar{z} + \bar{z}^2) = 3 - 2(z + \bar{z}) + z^2 + \bar{z}^2 = (t^2 - 3)^2$. Astfel, inegalitatea de demonstrat se rescrie sub forma

$$(*) \qquad \sqrt{3} \leq t + |t^2 - 3| \leq \frac{13}{4}, t \in [0, 2].$$

.... 4 puncte

Dacă

$$f(t) = t + |t^2 - 3| = \begin{cases} -t^2 + t + 3, & t \in [0, \sqrt{3}] \\ t^2 + t - 3, & t \in (\sqrt{3}, 2] \end{cases},$$

atunci variaţia funcţiei f este următoarea:

t	0		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$		2
$f(t)$	3	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	3

....2 puncte

Egalitatea în stânga se realizează când $t = \sqrt{3}$, deci pentru $z = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, iar cea din dreapta când $t = \frac{1}{2}$, deci pentru $z = -\frac{7}{8} \pm i\frac{\sqrt{15}}{8}$. ....1 punct

Varianta 2. Fie $z = a + bi$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 1$. Atunci $|1 + z|^2 = (a + 1)^2 + b^2 = 2a + 2$, iar $|1 - z + z^2|^2 = (1 - a + a^2 - b^2)^2 + (2ab - b)^2 = (2a^2 - a)^2 + (2a - 1)^2(1 - a^2) = (2a - 1)^2$. .... 3 puncte

Inegalitatea de demonstrat devine

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{2a + 2} + |2a - 1| \leq \frac{13}{4}, a \in [-1, 1],$$

care, cu notaţia $t = \sqrt{2a + 2} \in [0, 2]$, este tocmai inegalitatea (*). . 1 punct

Demonstrarea inegalităţii (*) .... 2 puncte

Studiul cazurilor în care se realizează egalităţile. .... 1 punct

Varianta 3. Fie $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Atunci $|1 + z|^2 = (1 + cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = 4\cos^2\frac{\varphi}{2}$, iar $|1 - z + z^2|^2 = (1 - \cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi)^2 + (2\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi)^2 = (2\cos^2\varphi - \cos\varphi)^2 + (2\cos\varphi - 1)^2\sin^2\varphi = (2\cos\varphi - 1)^2 = \left(4\cos^2\frac{\varphi}{2} - 3\right)^2$. .... 3 puncte

Inegalitatea de demonstrat devine $\sqrt{3} \leq 2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| + \left|4\cos^2\frac{\varphi}{2} - 3\right| \leq \frac{13}{4}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, care, cu notaţia $t = 2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| \in [0, 2]$, este tocmai inegalitatea (*). .... 1 punct

Demonstrarea inegalităţii (*) .... 2 puncte

Studiul cazurilor în care se realizează egalităţile. .... 1 punct

Problema 3. Determinaţi numerele reale x care pot fi scrise sub forma

$$x = \frac{1}{a_1a_2\ldots a_n} + \frac{a_1}{a_2a_3\ldots a_n} + \frac{a_2}{a_3a_4\ldots a_n} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

unde $n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere naturale nenule cu $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Gheorghe Iurea

Barem.

Evident că $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$ .... 1 punct

Cum $\frac{1}{a_1 a_2 ... a_n} \leq \frac{1}{a_2 a_3 ... a_n}$, $\frac{a_1}{a_2 a_3 ... a_n} \leq \frac{a_2 - 1}{a_2 a_3 ... a_n} = \frac{1}{a_3 a_4 ... a_n} - \frac{1}{a_2 a_3 ... a_n}$; ...; $\frac{a_{n-2}}{a_{n-1} a_n} \leq \frac{a_{n-1} - 1}{a_{n-1} a_n} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1} a_n}$; $\frac{a_{n-1}}{a_n} \leq \frac{a_n - 1}{a_n} = 1 - \frac{1}{a_n}$, rezultă că $x \leq 1$, deci $x \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$. . . . . 2 puncte

Observăm că $x = 1$ poate fi scris sub forma dorită, considerând $n = 1$, $a_1 = 1$, iar dacă $x = \frac{p}{q} \in (0, 1)$, cu $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p < q$, atunci

$$x = x \cdot 1 = \frac{p}{q} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots p} + \frac{1}{2 \cdot 3 \ldots p} + \frac{2}{3 \cdot 4 \ldots p} + \ldots + \frac{p-1}{p} \right),$$

deci putem considera $n = p, a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_{p-1} = p - 1, a_p = q$. În concluzie, numerele căutate sunt elementele mulţimii $\mathbb{Q} \cap (0, 1]$. . . . 4 puncte

Problema 4. Fie $\mathcal{P}$ mulţimea punctelor planului, iar $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ o funcţie care duce dreptele în drepte şi astfel încât orice patrulater convex este dus într-un patrulater convex de acelaşi perimetru. Demonstraţi că f este izometrie.

Notă: Funcţia $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ se numeşte izometrie dacă oricare ar fi punctele M şi N din plan, segmentele MN şi $f(M)f(N)$ au lungimi egale.

Paul Georgescu şi Gabriel Popa

Barem.

Presupunem că f nu ar fi izometrie; există atunci $X, Y \in \mathcal{P}$ astfel încât $XY \neq f(X)f(Y)$. Fie $XSTY$ un patrulater convex. Demonstrăm că există două vârfuri ale acestui patrulater, pe care le vom redenumi A şi B, astfel încât $AB < f(A)f(B)$. În caz contrar, am avea $XS \geq f(X)f(S)$, $ST \geq f(S)f(T)$, $TY \geq f(T)f(Y)$, $YX > f(Y)f(X)$ şi, prin adunare, ar rezulta că $P[XSTY] > P[f(X)f(S)f(T)f(Y)]$, contradicţie. . . . . 3 puncte

Fie $C \in \mathcal{P}$ astfel încât $P[ABC] < 2\alpha$, unde α este lungimea segmentului $f(A)f(B)$ (de exemplu, considerăm $\triangle ABC$ isoscel, cu $CA = CB$ şi $h_c < \sqrt{\alpha(\alpha - AB)}$). Dacă $AMNB$ este un patrulater convex cu $M, N \in \text{Int}ABC$, atunci $P[AMNB] < P[ABC]$. Pe de altă parte, $P[AMNB] = P[f(A)f(M)f(N)f(B)] = (f(A)f(M) + f(M)f(N) + f(N)f(B)) + \alpha \geq 2\alpha > P[ABC]$, contradicţie. . . . . 4 puncte