Al VII-lea Concurs Naţional de Matematică ”Alexandru Myller”
28 Martie 2009

SOLUŢII ŞI BAREME

CLASA a VII-a

Problema 1. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $n! + 3 \cdot 2^n = 6^{n-2}$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. *Artur Bălăucă*

Soluţia 1. *(Artur Bălăucă)*

Pentru ecuaţia $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n + 3 \cdot 2^n = 6^{n-2}$ observăm că valorile $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ nu sunt soluţii. 2p

Pentru $n = 5$ ecuaţia se verifică: $5! + 3 \cdot 2^5 = 216 = 6^{5-2}$. 2p

Dacă $n \geq 6$ atunci $9/n!, 9/6^{n-2}$, de unde rezultă că $9/3 \cdot 2^n$, adică $3/2^n$, absurd. 3p

Rezultă că unica soluţie este $n = 5$.

Soluţia 2. *(Mircea Fianu)*

Cazurile $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se tratează analog soluţiei 1. Considerând valorile $n \in \{6, 7, 8\}$, 5 nu divide numărul $6^{n-2} - 3 \cdot 2^n$.

Dacă $n \geq 9$ avem:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
$$4 \cdot n > 6^2$$
$$5 \cdot (n-1) > 6^2$$
$$6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (n-2) > 6^{n-7}$$

Prin înmulţire, rezultă că $n! > 6^{n-2}$ şi iar nu avem soluţie.

Problema 2. Fie triunghiul ABC şi punctul D situat pe latura $[BC]$. Arătaţi că:

$$AB \cdot DC + AC \cdot BD \geq AD \cdot BC.$$

***

Soluţia 1. *(Mircea Fianu)*

Construim $DE \parallel AB$ şi $DF \parallel AC$, unde $E \in [AC], F \in [AB]$.

Conform Teoremei fundamentale a asemănării aplicată triunghiului ΔABC şi paralelei DE avem: $\frac{CD}{CB} = \frac{DE}{AB}$ de unde $AB \cdot CD = CB \cdot DE$. 2p

Conform Teoremei fundamentale a asemănării aplicată triunghiului ΔABC şi paralelei DF avem: $\frac{BD}{CB} = \frac{DF}{AC}$ de unde $BD \cdot AC = BC \cdot DF$.......... 2p

Patrulaterul $AEDF$ fiind paralelogram avem că $DE = AF$ şi, folosind inegalitatea triunghiului în ΔADF, are loc relaţia: $DE + DF = AF + DF > > AD$. 1p

Prin însumarea celor două relaţii obţinem: $AB \cdot CD + BD \cdot AC = BC \cdot \cdot (DE + DF) \cdot AD$. 1p

Egalitatea are loc dacă $D \in \{B, C\}$. 1p

Soluţia 2. *(Artur Bălăucă)*

Cazul $D = B$ sau $D = C$ conduce la $AB + AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Cazul $D \in (BC)$. Construim $CM \parallel AB, M \in AD$. Atunci, conform teoremei fundamentale a asemănării, triunghiurile ΔABD şi ΔMCD sunt asemenea, de unde $\frac{BD}{CD} = \frac{AD}{MD} = \frac{AB}{MC}$ şi atunci $\frac{BD}{BD+CD} = \frac{AD}{AD+MD}$, ceea ce implică $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AM}$. (1) În triunghiul ΔAMC avem $AC+CM > AM$. (2) Relaţiile (1) şi (2) conduc la $AC+\frac{CD \cdot AB}{BD} > \frac{BC \cdot AD}{BD}$, de unde $AC \cdot BD+CD \cdot AB > BC \cdot AD$.

Problema 3. Fie p un număr natural impar. Se ştie că oricare divizor al lui p are ultima cifră diferită de 3 şi 7. Să se arate că numărul $5p + 1$ nu este pătrat perfect. *Mircea Fianu*

Soluţie. Dacă $5p + 1$ este pătrat perfect, atunci $5p + 1 = (5k \pm 1)^2$. 2p de unde

$$5p + 1 = 25k^2 \pm 10k + 1$$

şi rezultă că $p = k(5k \pm 2)$. 2p

Cum k este divizor al numărului impar p, atunci k este impar iar ultima cifră a numărului $5k$ va fi 5. .... 2p

Atunci $\text{U}(5k \pm 2) \in \{3, 7\}$, contradicţie. 1p

Problema 4. Fie triunghiul echilateral ABC şi punctul D situat pe latura (AC). Bisectoarea unghiului $\angle ABD$ intersectează paralela prin A la dreapta BC în punctul E. Arătaţi că $AE + DC = BD$.

Cristian Lazăr

Soluţie. *(Mircea Fianu)* Considerăm punctul E' pe semidreapta opusă lui $(AE$ astfel încât $AE' = CD$. AB este secantă pentru dreptele paralele BC şi AE de unde rezultă că $m(\angle E'AB) = m(\angle ABC) = 60^o$. 2p

Deoarece $AB = BC, CD = AE'$ şi $m(\angle DCB) = m(\angle E'AB) = 60^o$ avem congruenţa $\Delta E'AB \equiv \Delta DCB$ (L.U.L.), ... 2p

care implică $E'B = DB$ şi $\angle E'BA \equiv \angle DBC$. Cum $(BE$ este bisectoarea unghiului $\angle ABD$, atunci $\angle ABE \equiv \angle EBD$ de unde $\angle E'BE \equiv \angle EBC$. Dreptele AE şi BC fiind paralele, BE secantă, rezultă că $\angle EBC \equiv \angle E'EB$. Obţinem că triunghiul $\Delta E'EB$ este isoscel cu baza BE. 2p

Deci $EA + AE' = E'B = BD$. 1p

CLASA a VIII-a

Problema 1. Fie un tetraedru regulat cu muchia de lungime 3. Pe suprafaţa acestuia se consideră 37 de puncte. Arătaţi că printre aceste puncte există două astfel încât distanţa dintre ele este cel mult egală cu 1. ***

Soluţie. Conform principiului cutiei, cum tetraedrul are patru feţe, pe una din feţe vor fi cel puţin 10 puncte. 3p

Faţa fiind triunghi echilateral de latură 3 o împărţim în 9 triunghiuri echilaterale de latura 1. .... 1p

Din nou, conform principiului cutiei, vor exista cel puţin 2 puncte situate în interiorul unui triunghi echilateral de latură 1. Acestea vor fi situate la distanţa cel mult egală cu latura triunghiului echilateral, adică 1. .... 3p

Problema 2. Determinaţi perechile de numere $(a, b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ care verifică egalitatea

$$2(a+b)^2 + 3(a+b) + ab + 4 = 0.$$

Petru Răducanu

Soluţie. Ecuaţia este echivalentă cu:

$$2a^2 + ab + 2b^2 + 4ab + 3a + 3b + 4 = 0,$$

de unde

$$a(a+2b) + 2b(2a+b) + 3a + 3b + 4 = 0$$

iar

$$(a+2b)(2a+b) + (a+2b) + (2a+b) + 1 = -3,$$

ceea ce implică $(a+2b+1)(2a+b+1) = -3$. 4p

Aşadar

$$(a+2b+1, 2a+b+1) \in (1;-3), (-1;3), (3;-1), (-3,1),$$

ceea ce conduce la $(a, b) \in (-2; 2), (2; -2)$. 3p

Problema 3. Fie $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Să se arate că $a + b \geq 1 \geq c + d$. *Gheorghe Iurea*

Soluţie. Cum $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ avem că $ab \geq c^2, ab \geq d^2, cd \leq a^2$, $cd \leq b^2$. 2p

Atunci $(a+b)^2 = a^2+ab+ab+b^2 \geq a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$ implică $a+b \geq 1$ 2p

iar $(c+d)^2 = c^2+cd+cd+d^2 \leq a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$ implică $c+d \leq 1$. 2p

Deci $c + d \leq 1 \leq a + b$. 1p

Problema 4. Numim *piramidă Myller* o piramidă $SABCD$ cu baza $ABCD$ care are $SA = SB = SC = SD$, $\angle ASB \equiv \angle ASD$ şi $\angle BSC \equiv \angle DSC$ iar lungimile $SA, AB, BC, CD, DA, AC, BD$ sunt numere naturale nenule. Aflaţi piramida Myller de volum minim.

Cristian Lazăr

Soluţie. Deoarece $SA = SB = SC = SD, \Delta SAB \equiv \Delta SAD$ şi $\Delta SBC \equiv \Delta SCD$ obţinem că $ABCD$ este un deltoid inscriptibil. 3p

Triunghiul dreptunghic de dimensiuni minime în care laturile şi înălţimea sunt exprimate prin numere naturale este cel cu laturile 15,20,25. .... 2p

Lungimea minimă a muchiei laterale este 13. .... 1p

Volumul minim este $50\sqrt{51}$. 1p

CLASA a IX-a

Problema 1. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care există o mulţime $A \subset \mathbb{R}$ cu n elemente, având proprietatea $a(b^3 + 6) \le b(a^3 + 6), \forall a, b \in A$.

Gheorghe Iurea

Soluţie. Pentru $n = 1$, putem lua A orice mulţime cu un element.... 1p

Dacă $n \ge 2$, schimbând a şi b între ele, rezultă $a(b^3 + 6) = b(a^3 + 6)$, $\forall a, b \in A$ de unde $ab(a + b) = 6$ pentru $a, b \in A, a \ne b$. 2p

Apoi, dacă a, b, c sunt elemente distincte din A, atunci $a, b, c \ne 0$ şi $a + b + c = 0$. Rezultă astfel că A are cel mult trei elemente. 2p

În sfârşit, pentru $n = 2$ putem lua $A = \{1, 2\}$, iar pentru $n = 3$ putem lua $A = \{1, 2, -3\}$. 2p

Problema 2. Care este numărul minim de elemente care trebuie eliminate din mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, astfel încât în mulţimea rămasă să nu existe trei elemente x, y, z astfel încât $xy = z$?

*****

Soluţie. Trebuie eliminate cel puţin unul dintre $\{a, a^2\}$, $a \in \{1, 2, \ldots, 10\}$, deci cel puţin 10 elemente. 3p

Pe de altă parte, dacă eliminăm $\{1, 2, \ldots, 10\}$, rămâne o mulţime de tipul cerut. 14p

Problema 3. Fie triunghiul ABC şi punctele $M \in (AB), N \in (AC)$ astfel încât $BM + CN = MN + BC$. Notăm ρ raza cercului înscris în triunghiul AMN. Arătaţi că:

$$\rho\left(\sqrt{bc} + \sqrt{(p-b)(p-c)}\,\right) \le r\left(\sqrt{bc} - \sqrt{(p-b)(p-c)}\,\right).$$

Dan Brânzei

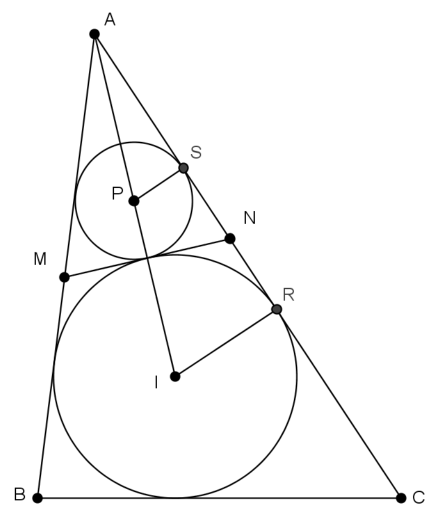
Soluţie. Condiţia $BM + CN = BC + MN$ arată că patrulaterul $BCNM$ este circumscriptibil, deci MN este tangentă la cercul $\mathcal{C}$ înscris în triunghiul ABC. 2p

Cum cercul $\mathcal{C}_1$ de rază ρ este inclus în suprafaţa $[AMN]$ şi are centrul pe bisectoarea AI, rezultă că $\rho_{\max}$ se obţine pentru cazul când $\mathcal{C}_1$ este tangent la $\mathcal{C}$. 2p

În acest caz,

$$\frac{\rho}{r} = \frac{AP}{AI} = \frac{AI - \rho - r}{AI} = \frac{AI - r}{AI + r} = \frac{1-k}{1+k},$$

unde $k = \frac{r}{AI} = \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$. 3p



Problema 4. Numărul întreg m are proprietatea că, pentru orice număr natural n, există $a_n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $|nm - 80a_n + 1| < 20$. Arătaţi că 80 divide m.

Dinu Şerbănescu

Soluţie. Să presupunem că $m = 80p + r, p \in \mathbb{Z}, |r| \in \{1, 2, \ldots, 40\}$. . 1p
Atunci, pentru $n = 1$ obţinem $|80(p - a_1) + r + 1| < 20$, deci $|r + 1| < 20$ (şi $p = a_1$) 2p
Apoi, dacă $r \geq 1$, pentru $n = \left[\frac{40}{r}\right]$ avem $nm = 80pn + nr$, cu $pn \in \mathbb{Z}$ şi $21 \leq 39 - r \leq nr \leq 40$, de unde $|nm - 80a + 1| \geq 22, \forall a \in \mathbb{Z}$, ceea ce contrazice ipoteza. 2p
În sfârşit, dacă $r \leq -1$, pentru $n = \left[-\frac{40}{r}\right]$ avem $nm = 80pn + nr$, cu $pn \in \mathbb{Z}$ şi $-40 \leq nr \leq -40 - r - 1 \leq -21$, de unde $|nm - 80a + 1| \geq 20, \forall a \in \mathbb{Z}$, ceea ce contrazice iar ipoteza. 2p

Soluţie alternativă. Avem $80a_n - 21 < nm < 80a_n + 19$ şi $80a_{n+1} - 21 < (n+1)m < 80a_{n+1} + 19$, de unde $80(a_{n+1} - a_n) - 40 < m < 80(a_{n+1} - a_n) + 40$, oricare ar fi n natural. Notăm $x_n = a_{n+1} - a_n$ şi obţinem $\frac{m-40}{80} < x_n < \frac{m+40}{80}, \forall n \in \mathbb{N}$. Cum diferenţa dintre $\frac{m+40}{80}$ şi $\frac{m-40}{80}$ este 1 şi $x_n \in \mathbb{Z}$, deducem că x_n este şir constant, adică a_n este progresie aritmetică de raţie $x \in \mathbb{Z}$. Pentru $n = 0$ găsim imediat că $a_0 = 0$, deci $a_n = nx$. Atunci $-21 < n(m-80x) <$ $< 19, \forall n \in \mathbb{N}$, de unde $m = 80x$, adică 80 divide m.

CLASA a X-a

Problema 1. Determinaţi valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care 41 are un multiplu de forma $\overline{a\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ cifre}}b}$, unde a, b sunt cifre zecimale nenule.

Mihai Bălună

Soluţie. Avem, modulo 41, $10^2 \equiv 18, 10^3 \equiv 16, 10^4 \equiv -4, 10^5 \equiv 1$. .. 2p
Rezultă că pentru $n = 5m + 4, m \in \mathbb{N}$ avem $\overline{a\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ cifre}}b} \equiv a + b \not\equiv 0$, .. 1p
iar $\overline{4\underbrace{00\ldots0}_{5m}1} \equiv 0$, $\overline{2\underbrace{00\ldots0}_{5m+1}5} \equiv 0$, $\overline{2\underbrace{00\ldots0}_{5m+2}9} \equiv 0$, $\overline{1\underbrace{00\ldots0}_{5m+3}4} \equiv 0$. ... 4p

Problema 2. Fie ABC un triunghi, $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ şi punctele $M \in BC$, $N \in CA$, $P \in AB$ astfel încât $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k$. Se ştie că $AM = BN =$ $= CP$. Demonstraţi că triunghiul ABC este echilateral. *I. V. Maftei*

Soluţie. Avem $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AB} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{AC}$ 2p
deci $AM^2 = (\frac{1}{1-k}\overrightarrow{AB} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{AC})^2 = \frac{c^2+k^2b^2-k(b^2+c^2-a^2)}{(1-k)^2}$ şi analoagele.... 2p
Apoi, sistemul rezultat are soluţie unică, iar aceasta duce la $a = b = c$.3p

Problema 3. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$ definim $f(x, y) =$ distanţa de la $|x - y|$ la cel mai apropiat întreg, iar pentru o mulţime finită $M \subset [0, 1]$ definim

$$s(M) = \sum_{x,y \in M,\ x<y} f(x, y).$$

Determinaţi valoarea maximă pentru $s(M)$ când M parcurge familia mulţimilor cu 4 elemente.

Dinu Şerbănescu

Soluţie. Dacă $M = \{a, b, c, d\}, a < b < c < d$ atunci $f(a, b) + f(b, c)+$ $+f(c, d) \leq d - a$ 2p
şi $d - a + f(a, d) \leq 1$. 1p
Apoi, $f(a, c) \leq \frac{1}{2}$ şi $f(b, d) \leq \frac{1}{2}$, deci $s(M) \leq 2$. 2p
Pentru $M = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$ avem $s(M) = 2$, deci maximul cerut este 2. . 2p

Problema 4. Fie a un număr real. Arătaţi că şirul cu termen general $x_n = (-1)^{[na]}$, $n \geq 0$ este periodic dacă şi numai dacă a este raţional.

Gheorghe Iurea

Soluţie. Dacă $a = \frac{p}{q}$, $q \in \mathbb{N}^*$, atunci şirul are perioada $2q$. 2p

Reciproc, să presupunem că şirul are perioada n_0. Atunci $[a(n+n_0)]-[an]$ este par $\forall n \in \mathbb{N}$. 1p

Pe de altă parte, $an_0 - 1 < [a(n+n_0)] - [an] < an_0 + 1$, iar intervalul $(an_0 - 1, an_0 + 1)$ conţine cel mult un număr par A, deci $[a(n+n_0)] - [an] = A$, constant. 2p

Deducem $[amn_0] = mA, \forall m \in \mathbb{N}$, deci $mA \leq amn_0 < mA + 1$, adică $A \leq an_0 < A + \frac{1}{m}, \forall m \in \mathbb{N}^*$, ceea ce implică $a = \frac{A}{n_0} \in \mathbb{Q}$. 2p

CLASA a XI-a

Problema 1. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale definit prin $x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = \left| x_n - \dfrac{n}{n+1} \right|$, oricare ar fi $n \geq 1$. Să se arate că şirul este divergent.

Paul Georgescu, Gabriel Popa

Soluţie. Arătăm prin inducţie că:

$$x_n < \frac{n}{n+1}, \forall n \geq 2.$$

Într-adevăr, pentru $n = 2$ avem $x_2 = \dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{2+1}$, iar din $x_n < \dfrac{n}{n+1}$ rezultă că $x_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} - x_n < \dfrac{n+1}{n+2}$, deoarece $x_n > 0$. 2p

Aşadar, $x_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} - x_n, \forall n \geq 2$. De aici $x_{n+2} = x_n + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$ şi deci $x_{2n} = x_2 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} + \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} + \dfrac{1}{2n}$. 2p

Atunci $x_{2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$, şir convergent la $\ln 2$ 2p

Presupunem că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent la L. Trecând la limită în relaţia $x_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} - x_n$ rezultă $L = \dfrac{1}{2}$, în contradicţie cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \ln 2$. 2p

Problema 2. a) Să se determine două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $A^2 + B^2 = I_2$ şi matricea $AB - BA$ este inversabilă.

b) Fie n un număr natural impar şi matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^2 + B^2 = I_n$. Să se arate că $\det(AB - BA) = 0$.

Andrei Ciupan

Soluţie.

a) Pentru $n = 2$ considerăm $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Atunci $A^2 = I_2$, $B^2 = 0_2$, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, iar $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Astfel $\det(AB - BA) = -1 \neq 0$. 3p

b) Fie matricile $X = A + iB$ şi $Y = B + iA$. Atunci $XY = i(A^2 + B^2) + AB - BA$ şi $YX = i(A^2 + B^2) + BA - AB$. 2p

Dar $\det(XY - i \cdot I_n) = \det(YX - i \cdot I_n)$, de unde

$$\det(AB-BA) = \det(BA-AB) \iff \det(AB-BA) = (-1)^n \det(AB-BA),$$

deci $\det(AB - BA) = 0$. 2p

Problema 3. Fie $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii polinomiale neconstante cu proprietatea că există şi este finită $\lim\limits_{x\to\infty}([P(x)] - [Q(x)])$. Să se arate că există $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $P(x) - Q(x) = n$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Gheorghe Iurea

Soluţie. Notăm $\lim\limits_{x\to\infty}([P(x)]-[Q(x)]) = k \in \mathbb{R}$. Deoarece $P(x)-Q(x) = ([P(x)] - [Q(x)]) + (\{P(x)\} - \{Q(x)\})$, există $a > 0$ astfel încât $|P(x) - Q(x)| < |k| + 2, \forall x > a$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty}(P(x) - Q(x))$ există, rezultă că este finită, deci $P(x) - Q(x) = c, c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$. 2p

Funcţia $x \longmapsto [P(x)] - [Q(x)]$ ia numai valori întregi, deci $k \in \mathbb{Z}$ şi există $b > 0$ astfel încât $[P(x)] - [Q(x)] = k, \forall x > b$. 2p

Aşadar $\{P(x)\} - \{Q(x)\} = c - k$, deci $\{c + Q(x)\} - \{Q(x)\} = c - k$, de unde $\{\{c\} + Q(x)\} - \{Q(x\} = c - k, \forall x > b$. 1p

Dacă $c \notin \mathbb{Z}$, alegem $u, v > b$ cu $Q(u) \in \mathbb{Z}$ şi $Q(v) = m - \{c\}, m \in \mathbb{Z}$. Rezultă $c - k > 0$, respectiv $c - k < 0$, contradicţie. Rămâne $c \in \mathbb{Z}$, ceea ce trebuia demonstrat. 2p

Problema 4. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică cu elementele de pe diagonala principală egale cu 1 şi cu suma modulelor elementelor de pe fiecare linie mai mică sau egală cu 2. Să se arate că $\det A \leq 1$.

Cosmin Pohoaţă

Soluţie.

Fie λ o valoare proprie pentru A şi $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vector propriu corespunzător lui λ. În acest caz, din relaţia $AX = \lambda X$, deducem că:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = \lambda x_k, \quad \text{oricare ar fi } k \in \overline{1, n}.$$

Cum însă $a_{kk} = 1$, această ultimă relaţie se rescrie sub forma:

$$\sum_{j\neq k}^{n} a_{kj}x_j = (\lambda - 1)\, x_k, \quad \text{oricare ar fi } k \in \overline{1,n}.$$

....2p

Fie $k' \in \overline{1,n}$ indicele pentru care $|x_{k'}| = \max\left\{|x_j|,\ j \in \overline{1,n}\right\}$. Astfel, folosind inegalitatea modulului în relaţia de mai sus scrisă pentru k', obţinem

$$|\lambda - 1|\, |x_{k'}| = \left|\sum_{j\neq k'}^{n} a_{k'j}x_j\right| \leq \sum_{j\neq k'}^{n} |a_{k'j}|\, |x_j| \leq \sum_{j\neq k'}^{n} |a_{k'j}|\, |x_{k'}|.$$

Cum din ipoteză avem $\sum_{j\neq k'}^{n} |a_{k'j}| \leq 1$, obţinem $|\lambda - 1| \leq 1$. 2p

Pe de altă parte, matricea A fiind simetrică ea are (toate) valorile proprii reale. 1p

Aşadar, în virtutea inegalităţii $|\lambda - 1| \leq 1$, deducem că valorile proprii ale matricei A, fie ele $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$, aparţin intervalului $(0, 2)$. Deci, le putem aplica inegalitatea mediilor. Mai exact:

$$1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i} = \sqrt[n]{\det A}.$$

În concluzie, $\det A \leq 1$. 2p

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie f, g două funcţii polinomiale reale, de acelaşi grad, ambele având coeficientul dominant egal cu 1. Dacă g nu are rădăcini reale pozitive, calculaţi:

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x \left(\frac{f(nx)}{g(nx)} - 1\right) \mathrm{d}x.$$

Radu Gologan

Soluţie. Schimbarea de variabilă $t = nx$ duce la

$$\frac{1}{n}\int_0^n t\left(\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right)\mathrm{d}t$$

....2p

Limita de mai sus gândită ca limită de funcţii (de forma $0/0$), cu regula l'Hospital, devine:

$$\lim_{u\to\infty} u\left(\frac{f(u)}{g(u)}-1\right)$$

....3p

Dacă $f = X^k + a_1X^{k-1} + \ldots, g = X^k + b_1X^{k-1} + \ldots$ limita de mai sus este $a_1 - b_1$. 2p

Problema 2. Fie A un inel.

a) Arătaţi că dacă $x \in A$ este nilpotent (există $k \in \mathbb{N}^*$ cu $x^k = 0$) atunci $1 + x$ este inversabil.

b) Dacă A este finit, numărul elementelor inversabile este un număr prim iar elementele neinversabile sunt nilpotente şi numărul elementelor neinversabile este mai mare sau egal cu numărul elementelor inversabile, arătaţi că A are 4 elemente. ***

Soluţie. a) Rezultă din identitatea $(1+x)(1-x+x^2-\cdots+x^{k-1}) = 0$, pentru k impar. 2p

b) Fie p numărul elementelor inversabile şi N mulţimea elementelor neinversabile. Cum funcţia $f : N \to A, f(x) = 1 + x$ este injectivă, rezultă din a) că N are cel mult p elemente. Atunci A are exact $2p$ elemente. 2p

Dacă $p > 2$ rezultă că A este izomorf cu $\mathbb{Z}_{2p}$ care are $p-1$ elemente inversabile, fals. 3p

Problema 3. Să se determine funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică egalitatea

$$f(\operatorname{arctg} x) = (1+x^2)f(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Al. Gabriel Mîrşanu

Soluţie. Funcţia f fiind continuă, fie F o primitivă a sa. Rezultă că $F(\operatorname{arctg} x) = F(x) + c$ cu c constanta, iar valoarea în 0 dă $c = 0$. Aşadar $F(\operatorname{arctg} x) = F(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ 2p

Considerăm $g(x) = \operatorname{arctg} x$. Se arată că şirul $(x_n)_n$ definit prin $x_0 \neq 0$ şi $x_{n+1} = g(x_n)$ converge la 0 ....2p

Rezultă $F(x_n) = F(x_0)$ deci $F(0) = F(x_0)$ prin urmare $F(x) = F(0)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ 2p

De aici $f = 0$. 1p

Problema 4. Fie p, $p > 2$ un număr prim şi f un polinom cu coeficienţi întregi de grad $p-1$ cu proprietatea că: pentru orice a, b numere întregi pentru care p divide $f(a) - f(b)$ rezultă că p divide $a - b$. Arătaţi că f are coeficientul dominant divizibil cu p.

Marian Andronache

Soluţie. Fie $f = \hat{a}X^{p-1} + \cdots$ privit ca funcţie polinomială în $\mathbb{Z}_p$. ...1p

Condiţia din enunţ este echivalentă cu faptul că f este injectivă ($\in \mathbb{Z}_p$), deci bijectivă. 3p

Rezultă că $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + \cdots + f(\widehat{p-1}) = \hat{0} + \hat{1} + \cdots + (\widehat{p-1}) = 0$. Pe de altă parte $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + \cdots + f(\widehat{p-1}) = (p-1)\hat{a}$. Rezultă $p|a$. 3p

SPONSORI

S.C. CANEL S.A. IAŞI

S.C. BOLERO S.R.L. IAŞI

S.C. RESURSE UMANE CONSOLT S.R.L .IAŞI

S.C. EUROLINK TOURS S.R.L. IAŞI

S.C. TERRAMOLD S.R.L. IAŞI

S.C. MOLDOCHIM S.A. IAŞI

S.C. ACIV CONINSTAL AG S.R.L. IAŞI

SOCIETATEA DE INVESTIŢII MOLDOVA IFN S.A. IAŞI

O.A.M.G.M.A.M.R. IAŞI

ASOCIAŢIA PĂRINŢILOR DIN COLEGIUL NAŢIONAL IAŞI