SOLUȚII

Clasa a V-a

1. a) Numărul căutat este $2015\underbrace{199...9}_{222\text{ de }9}2015$.

b) Cifra 7 se folosește de 100 + 100 + 100 (ca cifră a unităților, ca cifră a zecilor respectiv ca cifră a sutelor), deci de 300 ori în numerele mai mici ca 1000. În numerele de forma $\overline{1abc}$, cifra 7 se folosește tot de 300 ori. În total, cifra 7 se folosește de 300 + 300 + 1 = 601 ori.

2. Deoarece p este număr impar și nedivizibil cu 3, rezultă că $p = 6k+1$ sau $p = 6k+5$, $k \in \mathbb{N}$. Trebuie să arătăm că numărul $m = \dfrac{p^2-1}{24}$ este natural. Dacă $p = 6k+1$, atunci $m = \dfrac{36k^2+12k+1-1}{24} = \dfrac{k(3k+1)}{2} \in \mathbb{N}$. Dacă $p = 6k+5$, atunci $m = \dfrac{36k^2+60k+25-1}{24} = \dfrac{k(3k+5)+2}{2} \in \mathbb{N}$.

3. Avem: $a = \left(\underbrace{44...4}_{2015 ori}+1\right)\cdot\underbrace{44...4}_{2014 ori}5+\underbrace{11...1}_{2015 ori}-10^{2015} = \underbrace{44...4}_{2015 ori}\cdot\underbrace{44...4}_{2014 ori}5+\underbrace{44...4}_{2014 ori}5+\underbrace{11...1}_{2015 ori}-10^{2015} =$
$= \underbrace{44...4}_{2015 ori}\cdot\left(\underbrace{44...4}_{2015 ori}+1\right)+\underbrace{55...5}_{2014 ori}6-10^{2015} = \underbrace{44...4}_{2015 ori}{}^2+\underbrace{44...4}_{2015 ori}+\underbrace{55...5}_{2014 ori}6-10^{2015} = \underbrace{44...4}_{2015 ori}{}^2+1\underbrace{00...0}_{2015 ori}-$
$-10^{2015} = \underbrace{44...4}_{2015\text{ ori}}{}^2$, deci a este pătrat perfect.

Clasa a VI-a

1. Notăm cu $(OM$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOC$ și cu $(ON$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOD$. Există două situații fundamental disticte:

- $C \in \operatorname{Int}(\sphericalangle AOB)$, $A \in \operatorname{Int}(\sphericalangle COD)$, $A, C \in \operatorname{Int}(\sphericalangle BOD)$; atunci $m(\sphericalangle BON) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle BOD) = \frac{1}{2}\left(120^0 - m(\sphericalangle AOC)\right) = 60^0 - m(\sphericalangle AOM) = m(\sphericalangle BOM)$, deci semidreptele $(OM$ și $(ON$ coincid. Rezultă că $m(\sphericalangle MON) = 0^0$.

- $C \in \operatorname{Int}(\sphericalangle AOB)$, $B \in \operatorname{Int}(\sphericalangle COD)$, $B, C \in \operatorname{Int}(\sphericalangle AOD)$; atunci $m(\sphericalangle MON) =$
$= m(\sphericalangle BON) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COM) = \frac{1}{2} m(\sphericalangle BOD) + m(\sphericalangle BOC) + \frac{1}{2} m(\sphericalangle COA) =$
$= \frac{1}{2}\big(m(\sphericalangle AOD) + m(\sphericalangle BOC)\big) = \frac{1}{2}\big(m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle DOC)\big) = 60^0$.

2. a) Dacă scrierea ar fi posibilă, suma tuturor elementelor din A ar trebui să fie număr par, contradicție.

b) Observăm că $\underbrace{11..11}_{n \text{ de } 1} \vdots 11 \Leftrightarrow \underbrace{1-1+1-1+...}_{n \text{ cifre de } 1} \vdots 11 \Leftrightarrow n$ număr par. Pentru $n = 2k$, avem că $\underbrace{11..11}_{n \text{ de } 1} = 11 \cdot \underbrace{1010..01}_{2k-1 \text{ cifre}}$, deci $\underbrace{11..11}_{n \text{ de } 1} \vdots 121$ dacă şi numai dacă $k \vdots 11$. În cazul nostru, $k_{\max} = 9 < 11$, contradicţie.

c) Presupunem că ar exista două submulţimi X şi Y cu proprietăţile din enunţ. Ţinând cont de punctul b), numărul multiplilor de 11 din X va fi egal cu numărul multiplilor de 11 din Y, ceea ce este imposibil: în mulţimea A sunt 9 numere divizibile cu 11.

3. a) Se arată că $(n-k, n) = (k, n)$, de unde cerinţa.

b) Observăm că fracţiile ireductibile $\frac{k}{n}$ şi $\frac{n-k}{n}$ sunt distincte. Notăm cu S suma cerută; atunci $2S = \underbrace{1+1+...+1}_{p \text{ cifre de } 1}$, unde p este numărul numerelor mai mici ca 2015, prime cu 2015.

Avem că $p = \varphi(2015) = 2015\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\left(1-\frac{1}{31}\right) = 1440$, deci $S = 720$.

Clasa a VII-a

1. Este suficient să determinăm fracţiile subunitare ireductibile $\frac{a_0}{b}$, soluţia generală a problemei fiind $\frac{a_0 + nb}{b}$, cu $n \in \mathbb{N}$. Cum b este cifră şi $\frac{a}{b}$ este număr zecimal periodic, rezultă că $b \in \{3, 6, 7, 9\}$. Dacă $b = 3$, atunci $a_0 \in \{1, 2\}$; singura soluţie convenabilă este $\frac{a_0}{b} = \frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$. Dacă $b = 6$, atunci $a_0 \in \{1, 5\}$; singura soluţie convenabilă este $\frac{a_0}{b} = \frac{1}{6} = 0{,}1666666\ldots$. Dacă $b = 7$, atunci $a_0 \in \{1,2,3,4,5,6\}$; singura soluţie convenabilă este $\frac{a_0}{b} = \frac{5}{7} = 0{,}7142857142857\ldots$. Dacă $b = 9$, atunci $a_0 \in \{1,2,4,5,7,8\}$ şi nu obţinem noi soluţii. În concluzie, $\frac{a}{b} \in \left\{\frac{3n+1}{3}, \frac{6n+1}{6}, \frac{7n+5}{7} \middle| \ n \in \mathbb{N}\right\}$.

2. Prelungim MQ până intersectează AB în R. Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiurile ADC şi ABC şi obținem $\frac{RA}{RB}=\frac{QA}{CQ}=\frac{PD}{PC}$. Atunci triunghiurile RBM şi PCM sunt congruente (C.C). şi, astfel, obținem că $\sphericalangle NMQ \equiv \sphericalangle BRM \equiv \sphericalangle MPC \equiv \sphericalangle PMN$.

3. Dacă $p=2$, atunci $201q^2-q-2=0$ şi nu avem soluții. Dacă $q=2$, $p^2-p-802=0$ şi iarăşi nu avem soluții. Rezultă că p şi q sunt impare.
Relația dată se poate scrie sub forma $(p-q)(p+q-1)=200q^2$. Cum $p-q$ nu este multiplu de q, rezultă că $p=kq+1$, prin urmare $(p-q)(k+1)=200q$. Acum, $k=tq-1$, deci $p=tq^2-q+1$ şi avem că $(tq^2-2q+1)\cdot t=200$. Numărul t nu poate fi par, pentru că ar rezulta că $p=tq^2-q+1$ este par, contradicție. Rămâne că $t\in\{1,3,25\}$. Studiind fiecare caz în parte, găsim unica soluție $q=3, p=43$.

Clasa a VIII-a

1. Cum $OA\perp(OBC)$, rezultă că $OA\perp BC$. Însă $ON\perp BC$, prin urmare $BC\perp(OAN)$. Analog se arată că $AB\perp(OCM)$. Fie $\{H\}=AN\cap CM$; atunci $OH=(OAN)\cap(OCM)$ şi, din cele de mai sus, rezultă că $BC\perp OH$ şi $AB\perp OH$, deci $OH\perp(ABC)$.
În triunghiul ABC, AN şi CM sunt înălțimi. Se obține uşor că $BA=BC$ dacă şi numai dacă $AN=CM$. Unghiurile $\sphericalangle OAN$ şi $\sphericalangle OCM$ sunt congruente dacă şi numai dacă $OA=OC$ (via triunghiurile dreptunghice HOA şi HOC), fapt care se petrece dacă şi numai dacă $AN=CM$ (via triunghiurile dreptunghice OAN şi OCM).

2. a) Este evident că $A\subseteq(0,+\infty)$. Pentru a demonstra incluziunea inversă, fie $x\in(0,+\infty)$; dacă $n=[x]$, numerele $a=\frac{x}{n+2}$ şi $b=\frac{1}{n+2}$ aparțin intervalului $(0,1)$ şi $x=\frac{a}{b}$.

b) Este evident că $B\subseteq A$. Pentru incluziunea inversă, fie $x\in(0,+\infty)=A$, $m=\left[x\sqrt{2}\right]$ şi $a=\frac{x\sqrt{2}}{m+2}$, $b=\frac{\sqrt{2}}{m+2}$. Dacă $x\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, atunci $x=\frac{a}{b}\in B$. Dacă $x\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, atunci $x\sqrt{6}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ şi, pentru $p=\left[x\sqrt{6}\right]$, $a=\frac{x\sqrt{6}}{p+2}$, $b=\frac{\sqrt{6}}{p+2}$, avem că $x=\frac{a}{b}\in B$.

3. Fie a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 numerele date. Observăm că

$$(a_1+a_2+a_5-a_3-a_4)(a_1+a_3+a_4-a_2-a_5)=a_1^2-(a_2+a_5-a_3-a_4)^2\le a_1^2.$$

Grupând convenabil câte două celelalte opt diferențe, scriem încă patru inegalități similare cu cea precedentă. Prin înmulțirea acestora, rezultă cerința problemei.

Clasa a IX-a

1. Există doar patru posibilități fundamental distincte de asociere a măsurilor arcelor care să respecte cerințele problemei, anume (începând cu arcul $\overset{\frown}{AB}$, în sens orar): $(x,2x,3x,4x,5x,6x)$, $(x,2x,6x,4x,5x,3x)$, $(x,3x,2x,4x,6x,5x)$ și $(x,5x,3x,4x,2x,6x)$. În fiecare dintre aceste situații, putem găsi patru puncte astfel încât câte două perechi de arce determinate de ele să fie egale: $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{EF}=5x$, $\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{FB}=4x$, $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DE}=4x$ respectiv $\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{FB}=7x$. Astfel, în fiecare caz vor exista câte două coarde paralele. Celelalte două coarde nu vor fi paralele, prin urmare cele patru puncte selectate sunt, în fiecare caz, vârfurile unui trapez isoscel.

2. Din inegalitatea mediilor, $x^3+y\ge 2x\sqrt{xy}$ și atunci $\frac{x^2y}{x^3+y}\le\frac{x^2y}{2x\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{xy}}{2}$. Ar fi deci suficient să demonstrăm că $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\le 3$. Folosind binecunoscuta inegalitate $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2, \forall a,b,c\in\mathbb{R}$, obținem că $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\le x+y+z$. Însă $(x+y+z)^2\le 3(x^2+y^2+z^2)=9$, prin urmare $x+y+z\le 3$ și, cu aceasta, soluția este completă. Avem egalitate dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

3. Pentru $x=y=0$ obținem că $f^2(0)-2f(0)+1=0$, de unde $f(0)=1$.
Fie $a=f(1)\in\mathbb{Z}$. Avem: $f(2)=f^2(1)-f(1)+1=a^2-a+1$, $f(3)=f(1)f(2)-f(2)+$ $+1=a^3-2a^2+2a$, $f(4)=f(1)f(3)-f(3)+1=a^4-3a^3+4a^2-2a+1$. Pe de altă parte, $f(4)=f^2(2)-f(4)+1$. Înlocuind, deducem că $a^4-4a^3+5a^2-2a=0$, ecuație care se scrie sub forma $a(a-1)^2(a-2)=0$. În concluzie, $f(1)\in\{0,1,2\}$.
Deoarece $f(x+1)=(a-1)f(x)+1, \forall x\in\mathbb{Z}$, avem următoarele posibilități:

- dacă $f(1)=0$, atunci $f(x+1)=-f(x)+1$, de unde $f(x+2)=-f(x+1)+1=$ $=f(x),\ \forall x\in\mathbb{Z}$; astfel, $f(x)=\begin{cases}0, & x \text{ impar}\\ 1, & x \text{ par}\end{cases}$.
- dacă $f(1)=1$, atunci $f(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{Z}$.
- dacă $f(1)=2$, atunci $f(x+1)=f(x)+1$, prin urmare $f(x)=x+1,\ \forall x\in\mathbb{Z}$.

Cele trei funcții găsite verifică ecuația funcțională din ipoteză.

Clasa a X-a

1. *Soluția 1.* Evident, ecuația admite soluția $x=1$. Funcția $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x$ este strict descrescătoare pe $(\log_3 2,+\infty)$. Atunci $x>1 \Leftrightarrow f(x)<f(1) \Leftrightarrow 2^x+1<3^x$ şi $\log_3 2<x<1$ $\Leftrightarrow f(x)>f(1) \Leftrightarrow 2^x+1>3^x$. Ecuația nu are soluții $x>1$:

$$\log_2\left(3^{\log_2(3^x-1)}-1\right)>\log_2(3^x-1)>x>\log_3(2^x+1)>\log_3\left(2^{\log_3(2^x+1)}+1\right).$$

Analog se arată că nu există soluții $x<1$.

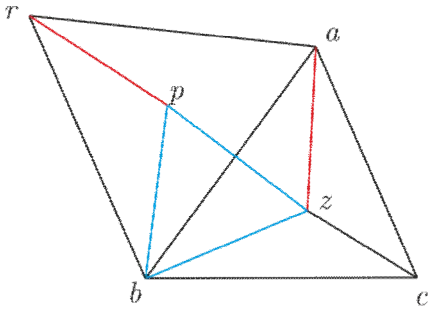
Soluția 2. Fie funcția $g:(\log_3 2,+\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\log_2\left(3^{\log_2(3^x-1)}-1\right)$; g este bijectivă şi are inversa $g^{-1}:\mathbb{R}\to(\log_3 2,+\infty),\ g^{-1}(x)=\log_3\left(2^{\log_3(2^x+1)}+1\right)$. Ecuația se poate scrie sub forma $g(x)=g^{-1}(x)$. Funcția g este strict crescătoare şi ecuația devine succesiv

$$g(x)=x \Leftrightarrow 3^{\log_2(3^x-1)}-1=2^x \Leftrightarrow \log_2\left(3^{\log_2(3^x-1)}-1\right)=x \Leftrightarrow \log_2(3^x-1)=\log_3(2^x+1).$$

Notăm $\log_2(3^x-1)=a$; rezultă că $3^x-1=2^a$ şi $2^x+1=3^a$. Adunând cele două egalități, obținem că $3^x+2^x=3^a+2^a$, de unde $x=a$, prin urmare $3^x-1=2^x$. Unica soluție a acestei ecuații este $x=1$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul k, fie $x_k\in\mathbb{N}$ exponentul lui 2 din descompunerea sa în factori primi: $k=a_k\cdot 2^{x_k}$. Atunci $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n=\frac{n!}{2^{x_1+x_2+\ldots+x_n}}=$număr impar, prin urmare $m=x_1+x_2+\ldots+x_n$ este cel mai mare număr natural cu proprietatea că $2^m\,|\,n!$, adică $m=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\ldots$. ezultă că $m\le\frac{n}{2}+\frac{n}{2^2}+\ldots<\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=n$, deci $m\le n-1$ şi concluzia se impune.

Egalitatea impune $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\ldots=n-1$. Folosind scrierea în baza 2 a lui n ($n=\overline{b_0b_1\ldots b_p}=$ $=b_0\cdot 2^p+b_1\cdot 2^{p-1}+\ldots+b_p$, $b_0\ne 0, b_i\in\{0,1\}, \forall i=\overline{0,p}$), avem că $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{2^p}\right]+\ldots$ $=\left(b_0\cdot 2^{p-1}+\ldots+b_{p-1}\right)+\left(b_0\cdot 2^{p-2}+\ldots+b_{p-2}\right)+\ldots+\left(b_0\cdot 2+b_1\right)+b_0=b_0\left(1+2+\ldots+2^{p-1}\right)+$ $+b_1\left(1+2+\ldots+2^{p-2}\right)+\ldots+b_{p-2}(1+2)+b_{p-1}=b_0\left(2^p-1\right)+b_1\left(2^{p-1}-1\right)+\ldots+b_{p-2}\left(2^2-1\right)+$ $+b_{p-1}(2-1)=\overline{b_0b_1\ldots b_p}-\left(b_0+b_1+\ldots+b_p\right)$. Prin urmare, egalitatea se atinge dacă şi numai dacă $\overline{b_0b_1\ldots b_p}-\left(b_0+b_1+\ldots+b_p\right)=n-1$, fapt care se realizează când $b_0+b_1+\ldots+b_p=1$, adică $b_0=1, b_1=\ldots=b_p=0$. Valorile căutate ale lui n sunt $n=2^p$, $p\in\mathbb{N}$.



3. *Soluția 1 (Mihai Bălună).* Fie $c=-a-b$. Ca la punctul Torricelli, construim figura alăturată. Atunci $|z-a|=|p-r|, |z-b|=|z-p|$, prin urmare $\sum|z-a|\geq|r-c|$. Avem apoi $r-b=w(a-b)$, unde $w=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$, $1-w+w^2=0$, deci

$$|r-c|=|wa+(1-w)b+a+b|=|(1+w)a+(1-w^2)b|=|1+w||a-w^2b|=\sqrt{3}|a-w^2b|,$$

ceea ce implică $\sum|z-a|\geq\sqrt{3}\max\{|a-w^2b|,|b-w^2c|,|c-w^2a|\}$.

Este uşor de văzut că, indiferent de amplasarea lui O (centrul cercului circumscris), cel puțin unul dintre unghiurile dintre vectori $\sphericalangle(a,w^2b), \sphericalangle(b,w^2c), \sphericalangle(c,w^2a)$ este de cel puțin $120°$; pentru acel unghi avem, cu teorema cosinusului, $|x-w^2y|^2\geq|x|^2+|xy|+|y|^2>3$. Astfel, relația cerută este adevărată pentru orice z, fără restricția $|z|<1$.

Soluția 2 (Gheorghe Iurea). În planul complex, considerăm punctele $A(a), B(b), C(c)$ (unde $c=-a-b$) şi $M(z)$, cu $|z|<1$. Cum *A*, *B*, *C* sunt exterioare cercului unitate iar *M* este în interiorul acestuia, segmentul *MA* taie cercul într-un punct $A'(\alpha)$, cu $|\alpha|=1$; există şi este unic $x\in(0,1)$ pentru care $\alpha=xa+(1-x)z$. Analog găsim $\beta,\gamma\in\mathbb{C}$, $|\beta|=|\gamma|=1$ şi $y,t\in(0,1)$ astfel încât $\beta=yb+(1-y)z$ şi $\gamma=tc+(1-t)z$.

Avem: $|z-a|+|z-b|+|z-c|=\left|z-\frac{1}{x}\alpha+\left(\frac{1}{x}-1\right)z\right|+\left|z-\frac{1}{y}\beta+\left(\frac{1}{y}-1\right)z\right|+\left|z-\frac{1}{t}\gamma+\left(\frac{1}{t}-1\right)z\right|$

$$=\sum\left|\frac{1}{x}(z-\alpha)\right|=\sum\left|\frac{1}{x}(z\overline{\alpha}-1)\right||\alpha|=\sum\left|\frac{1}{x}(z\overline{\alpha}-1)\right|\geq\left|z\left(\overline{\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{t}}\right)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{t}\right)\right|.$$

Dar $\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{t}=a+b+c+\left(\frac{1}{x}-1\right)z+\left(\frac{1}{y}-1\right)z+\left(\frac{1}{t}-1\right)z=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{t}-3\right)z$, prin urmare

$$|z-a|+|z-b|+|z-c|\geq\left|z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{t}-3\right)\overline{z}-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{t}\right)\right|=\left|\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{t}\right)\left(|z|^2-1\right)-3|z|^2\right|=$$

$$=3|z|^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{t}\right)\left(1-|z|^2\right)>3|z|^2+3\left(1-|z|^2\right)=3.$$

Clasa a XI-a

1. Folosind inegalitatea lui Sylvester, obținem că $0 = \operatorname{rang} A^2 \geq 2\operatorname{rang} A - 3$, prin urmare $\operatorname{rang} A \in \{0,1\}$.

Dacă $\operatorname{rang} A = 0$, atunci $A = O_3$ este soluție a ecuației din enunț.

Dacă $\operatorname{rang} A = 1$, atunci oricare două linii şi oricare două coloane ale lui A sunt proporționale, prin urmare matricea A este de forma $A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$. Rezultă că $A^2 = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)A$. Condiția $A^2 = O_3$ impune $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$. Reciproc, dacă A este o matrice de rang 1 pentru care $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$, atunci A verifică ecuația din enunț.

2. Din $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(2x) - f(x)\right) = 0$ rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(2^n x\right) - f\left(2^{n-1}x\right)\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Folosind această observație şi trucul uzual $f\left(2^{n+1}x\right) - f(x) = f\left(2^{n+1}x\right) - f\left(2^n x\right) + f\left(2^n x\right) - f(x)$, se arată prin inducție că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(2^n x\right) - f(x)\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că *f* este crescătoare. Dacă $a \geq 1$, există $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $2^{n-1} \leq a < 2^n$; rezultă că $f\left(2^{n-1}x\right) - f(x) \leq f(ax) - f(x) < f\left(2^n x\right) - f(x)$, $\forall x \in (0,\infty)$. Trecem la limită după $x \to \infty$ şi obținem concluzia.

Dacă $a \in (0,1)$, procedăm asemănător: observăm că ipoteza problemei implică faptul că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 0$, apoi demonstrăm prin inducție că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ etc.

3. Notăm $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Presupunem, prin absurd, că există $n_0 \geq 1$ pentru care şirul $(a_n)_{n\geq n_0}$ este periodic, de perioadă *T*. Notând $\alpha = a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + ... + a_{n_0+T}$, pentru orice număr natural *m* vom avea că $s_{n_0+mT} = s_{n_0} + m\alpha$. Din $\left|s_{n_0+mT} - (n_0 + mT)\sqrt{2}\right| < \frac{1}{2}$ rezultă că $\left|s_{n_0} + m\alpha - n_0\sqrt{2} - mT\sqrt{2}\right| < \frac{1}{2}$. Folosind inegalitatea modulului sub forma $|x| \leq |x+y| + |y|$ şi împărțind prin *mT*, obținem $\left|\frac{\alpha}{T} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2mT} + \frac{\left|s_{n_0} - n_0\sqrt{2}\right|}{mT} < \frac{1}{mT}$.

Trecem la limită după $m \to \infty$; rezultă că $\left|\frac{\alpha}{T} - \sqrt{2}\right| = 0$, prin urmare $\frac{\alpha}{T} = \sqrt{2}$. Această din urmă egalitate nu este însă posibilă, deoarece α şi *T* sunt numere naturale, iar $\sqrt{2}$ este număr irațional.