Concursul Interjudețean **ALEXANDRU MYLLER**
Ediția a XIII-a, 26 februarie 2015
COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI

ENUNȚURI

Clasa a V-a

1. a) Determinați cel mai mic număr natural care începe cu 2015, se termină cu 2015 şi are suma cifrelor 2015.

b) De câte ori se foloseşte cifra 7 în scrierea tuturor numerelor naturale mai mici ca 2015?

2. Demonstrați că, oricare ar fi numărul natural p impar și nedivizibil cu 3, există un număr natural m astfel încât $p^2 = 24m+1$.

3. Arătați că numărul $a = \overline{\underbrace{44...4}_{2014\text{ de }4}5}^2 + \overline{\underbrace{11...1}_{2015\text{ de }1}} - 10^{2015}$ este pătrat perfect.

Clasa a VI-a

1. Se consideră unghiurile distincte $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle COD$, cu interioarele nedisjuncte, ambele având măsurile de 60°. Determinați măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOC$ şi $\sphericalangle BOD$.

2. Se consideră mulțimea $A = \left\{1,\ 11,\ 111,\ ...\ ,\underbrace{11..11}_{19\text{ de }1}\right\}$.

a) Arătați că mulțimea A nu se poate scrie ca reuniunea a două mulțimi disjuncte având aceeaşi sumă a elementelor.

b) Demonstrați că mulțimea A nu conține multipli de 121.

c) Arătați că mulțimea A nu se poate scrie ca reuniunea a două mulțimi disjuncte având acelaşi produs al elementelor.

Cătălin Ciupală

3. a) Se consideră numărul natural $n \geq 3$ şi numărul $k \in \{1,2,...,n-1\}$. Arătați că fracția $\frac{k}{n}$ este ireductibilă dacă şi numai dacă fracția $\frac{n-k}{n}$ este ireductibilă.

b) Determinați suma fracțiilor ireductibile din mulțimea $\left\{\frac{1}{2015},\frac{2}{2015},...,\frac{2014}{2015}\right\}$.

Clasa a VII-a

1. Determinați fracțiile ireductibile $\frac{a}{b}$ care se scriu sub formă zecimală ca fracții periodice, cu zecimala de pe poziția b egală cu b.

Gabriel Popa

2. Fie $ABCD$ un dreptunghi iar M şi N mijloacele laturilor BC respectiv AD. Dacă P este un punct pe semidreapta $(CD$ care nu aparține segmentului $[CD]$ şi Q este intersecția dintre PN şi AC, demonstrați că MN este bisectoarea unghiului $\sphericalangle QMP$.

3. Determinați numerele prime p şi q cu proprietatea că $p^2 + q = 201q^2 + p$.

Titu Zvonaru

Clasa a VIII-a

1. Se consideră segmentele OA, OB şi OC, două câte două perpendiculare. Notăm cu M şi cu N proiecțiile punctului O pe dreptele AB respectiv BC. Arătați că unghiurile $\sphericalangle OAN$ şi $\sphericalangle OCM$ sunt congruente dacă şi numai dacă segmentele AB şi BC sunt congruente.

Gabriel Popa

2. Se consideră mulțimile

$$A = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in (0,1) \right\} \text{ şi } B = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in (0,1) \setminus \mathbb{Q} \right\}.$$

a) Arătați că $A = (0, +\infty)$.

b) Demonstrați că cele două mulțimi sunt egale.

Gabriel Popa

3. Cinci numere reale pozitive au proprietatea că, dacă din suma oricăror trei se scade suma celor două rămase, diferența obținută este pozitivă. Demonstrați că produsul tuturor celor zece astfel de diferențe nu este mai mare decât pătratul produsului celor cinci numere inițiale.

Clasa a IX-a

1. Pe un cerc se consideră, în sensul mişcării acelor de ceasornic, punctele A, B, C, D, E şi F astfel încât măsurile arcelor $\overparen{AB}, \overparen{BC}, \overparen{CD}, \overparen{DE}, \overparen{EF}$ şi $\overparen{FA}$ (măsurate tot în sensul mişcării acelor de ceasornic) să fie, într-o ordine oarecare, $x, 2x, 3x, 4x, 5x$ şi $6x$, unde $x \in \mathbb{R}_+^*$, iar valoarea absolută a diferenței măsurilor oricăror două arce opuse să fie egală cu $3x$. Arătați că putem alege patru dintre cele şase puncte care să fie vârfurile unui trapez isoscel.

Cristian Lazăr

2. Fie x, y, z numere reale strict pozitive având suma pătratelor egală cu 3. Arătați că

$$\frac{x^2y}{x^3+y}+\frac{y^2z}{y^3+z}+\frac{z^2x}{z^3+x}\leq\frac{3}{2}.$$

Titu Zvonaru

3. Determinați funcțiile $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ care au proprietatea că

$$f(x+y)=f(x)f(y)-f(xy)+1,\text{ oricare ar fi } x,y\in\mathbb{Z}.$$

Gheorghe Iurea

Clasa a X-a

1. Determinați numerele reale $x\in(\log_3 2,+\infty)$ cu proprietatea că

$$\log_2\left(3^{\log_2(3^x-1)}-1\right)=\log_3\left(2^{\log_3(2^x+1)}+1\right).$$

2. Notăm cu a_k cel mai mare divizor impar al numărului natural nenul *k*. Demonstrați că $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\geq\frac{n!}{2^{n-1}}$, oricare ar fi numărul natural nenul *n*. Pentru care valori ale lui *n* se atinge egalitatea?

3. Fie *a* și *b* două numere complexe astfel încât $|a|>1, |b|>1$ și $|a+b|>1$. Arătați că

$$|z-a|+|z-b|+|z+a+b|>3,\text{ oricare ar fi } z\in\mathbb{C}\text{ cu } |z|<1.$$

Gheorghe Iurea

Clasa a XI-a

1. Determinați matricele $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ care au proprietatea că $A^2=O_3$.

2. Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ este monotonă și are proprietatea că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(2x)-f(x)\right)=0$. Arătați că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(ax)-f(x)\right)=0$, oricare ar fi numărul real strict pozitiv *a*.

3. Șirul $(a_n)_{n\geq1}$ are toți termenii egali cu 1 sau cu 2 și are proprietatea că, pentru fiecare număr întreg $n\geq1$, $\left|a_1+a_2+\ldots+a_n-n\sqrt{2}\right|<\frac{1}{2}$. Demonstrați că nu există numere naturale $n_0\geq1$ pentru care șirul $(a_n)_{n\geq n_0}$ să fie periodic.