(5)

Ministerul Educaţiei Naţionale
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 9 Martie 2013

CLASA a V-a

Problema 1. a) Calculaţi $5^3 + 6^3 + 7^3 + 11^3$;

b) Arătaţi că numărul 2015^{2014} poate fi scris ca o sumă de patru cuburi perfecte.

Gazeta Matematică

Soluţie: a) $5^3 = 125$; $6^3 = 216$; $7^3 = 343$; $11^3 = 1331$ şi apoi suma $125 + 216 + 343 + 1331 = 2015$ .... **2 p**

b) $2015^{2014} = 2015^{2013} \cdot 2015 = 2015^{2013}(5^3 + 6^3 + 7^3 + 11^3)$ ...... **2 p**

$2015^{2013}(5^3+6^3+7^3+11^3) = 2015^{2013} \cdot 5^3 + 2015^{2013} \cdot 6^3 + 2015^{2013} \cdot 7^3 + 2015^{2013} \cdot 11^3 = (2015^{671} \cdot 5)^3 + (2015^{671} \cdot 6)^3 + (2015^{671} \cdot 7)^3 + (2015^{671} \cdot 11)^3$
.... **3p**

Problema 2. Determinaţi cifrele nenule a, b, c astfel încât $\overline{ab}^2 = \overline{cab}$.

Soluţie: Ultima cifră a lui $\overline{ab}^2$ este egală cu ultima cifră a lui $\overline{cab}$ implică $b \in \{1, 5, 6\}$ .... **1 p**

Pentru $b = 1$ şi $a \geq 4$ avem $\overline{a1} \geq 1000$ .... **1 p**

Pentru $b = 1$ şi $a \in \{1, 2, 3\}$ relaţia nu se verifică. .... **1 p**

Pentru $b = 5$ şi $a \geq 3$ avem $\overline{a5} \geq 1000$ .... **1 p**

Pentru $b = 5$ şi $a \in \{1, 2\}$ relaţia se verifică atunci când $a = 2$. Obţinem $c = 6$. .... **1 p**

Pentru $b = 6$ şi $a \geq 3$ avem $\overline{a6} \geq 1000$ .... **1 p**

Pentru $b = 6$ şi $a \in \{1, 2\}$ relaţia nu se verifică. .... **1 p**

Soluţie alternativă:

Relaţia din enunţ se scrie $\overline{ab} \cdot (\overline{ab} - 1) = 100 \cdot c$. .... **3 p**

Deoarece în membrul stâng avem un produs de două numere consecutive deducem că $100 \cdot c$ are singura scriere convenabilă $25 \cdot (4 \cdot c)$. .... **3 p**

Aşadar $4 \cdot c = 24$, de unde obţinem $c = 6$ şi $\overline{ab} = 25$. .... **1 p**

Problema 3. Se consideră un număr natural A scris cu n cifre nenule, $n \geq 1$. Numărul B este obţinut din numărul A prin rearanjarea cifrelor acestuia. Ştiind că $A + B = 10^n$ se cere:

a) Pentru $n = 3$, daţi un exemplu de numere A şi B cu proprietatea din enunţ.

b) Arătaţi că n este număr impar.

c) Demonstraţi că în scrierea lui A există cel puţin o cifră egală cu 5.

Soluţie: a) Un exemplu este $A = 365$, $B = 635$ .... **2 p**

b)

A	...	a	...	...	b-1	c	a
B	...	b-1	...	...	a	d	b
	9	9	9	9	9	9	10

Tabelul are n coloane. Pe prima linie a tabelului sunt trecute cifrele numărului A, iar pe a doua linie sunt cifrele corespunzătoare ale numărului B.

Evident $a+b=10$. Pe orice coloană, în afară de cea a unităţilor, suma cifrelor este egală cu 9. .... **1 p**

Deoarece a trebuie să apară şi pe linia lui B, acesta se va grupa numai cu cifra $b-1$. Cum cifra $b-1$ nu poate apărea pe aceeaşi coloană la cele două numere, deoarece suma pe coloană ar fi pară, înseamnă că ea va apărea pe un număr par de coloane, în pereche cu cifra a .... **1 p**

Analog se întâmplă pentru oricare pereche de cifre (c,d), $c+d=9$.

Astfel, tabelul va avea un număr par de coloane, exceptând coloana unităţilor, deci, în concluzie, n este număr impar .... **1 p**

c) Numărul de apariţii ale cifrei a pe prima linie trebuie să fie egal cu numărul de apariţii ale lui a pe linia a doua. Prin urmare, dacă $a \neq b$, a va apărea din nou pe linia a doua cu $b-1$ deasupra. Aceasta implică apariţia cifrei $b-1$ din nou pe a doua linie, evident cu a deasupra. Procesul acesta ar continua la infinit, ceea ce este absurd. Aşadar $a=b$ şi cum $a+b=10$ rezultă $a=5$, deci cifra 5 apare în număr. .... **2 p**

Problema 4. Se consideră mulţimea $M=\{2^1,2^2,2^3,...,2^{15}\}$.

a) Daţi un exemplu de trei mulţimi, A, B, C, nevide şi disjuncte două câte două astfel încât $A\cup B\cup C=M$, iar produsul elementelor fiecărei mulţimi să fie acelaşi?

b) Arătaţi că nu există trei mulţimi, X, Y, Z, nevide şi disjuncte două câte două astfel încât $X\cup Y\cup Z=M$, iar suma elementelor fiecărei mulţimi să fie aceeaşi?

Soluţie: a) Vom nota $p(X)$ produsul elementelor din mulţimea X.

$p(M)=2^1\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\ldots\cdot 2^{15}=2^{1+2+3+\ldots+15}=2^{120}$ .... **1 p**

$p(A)=p(B)=p(C)=2^{40}$ .... **1 p**

Un exemplu este: $A=\{2^1,2^6,2^9,2^{10},2^{14}\}$, $B=\{2^2,2^3,2^4,2^8,2^{11},2^{12}\}$, $C=\{2^5,2^7,2^{13},2^{15}\}$ .... **1 p**

Notă: Numai prezentarea exemplului se apreciază cu 3 puncte.

b) Presupunem că există mulţimile X, Y şi Z astfel încât $X\cup Y\cup Z=M$ şi $s(X)=s(Y)=s(Z)$ (*Am notat* $s(X)$, $s(Y)$, $s(Z)$ *sumele elementelor din mulţimile* X, Y, Z)

Fie 2^x, 2^y, 2^z cele mai mici elemente din mulţimile x, Y respectiv Z.

Putem considera că $x<y<z$.

Rezultă că 2^x divide $s(X)$ şi 2^{x+1} nu divide $s(X)$, iar 2^y divide $s(Y)$ . . .. **2 p**

Cum $x+1\leq y$, deducem că 2^{x+1} divide $s(Y)$. Înseamnă că $s(X)\neq s(Y)$ . . . . **2 p**

(6)

Ministerul Educaţiei Naţionale
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 9 Martie 2013

CLASA a VI-a

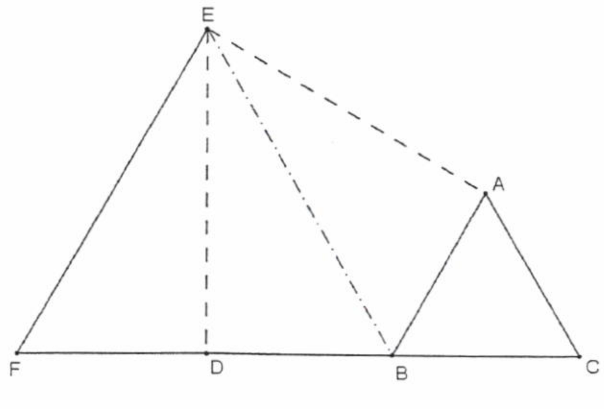
Problema 1. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi punctul D pe semidreapta opusă semidreptei $(BC$, astfel încât $[DB] \equiv [BC]$. Considerăm punctul E în semiplanul determinat de dreapta AD ce nu conţine punctul B, astfel încât distanţa de la E la AB este egală cu EA , distanţa de la E la DC este egală cu ED şi $EA = ED$, iar punctul F astfel ca $D \in (BF)$ şi $[FD] \equiv [BC]$.

a) Demonstraţi că $\Delta FDE \equiv \Delta BAE$.

b) Arătaţi că $[EB$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AED}$.

Gazeta Matematică

Soluţie:



a) $[FD] \equiv [AB]$ (ambele sunt congruente cu $[BC]$)
$[DE] \equiv [AE]$ (din ipoteză)
$\widehat{FDE} \equiv \widehat{BAE}$ (fiecare are 90^0) .... **3 p**
Din cele trei relaţii rezultă $\triangle FDE \equiv \triangle BAE$ .... **1 p**
b) $\triangle BAE \equiv \triangle BDE$ conform cazului L.L.L.
Din această congruenţă obţinem $\widehat{AEB} \equiv \widehat{DEB}$ .... **2 p**
De aici concluzia $[EB$ este bisectoarea $\widehat{AED}$ .... **1 p**

Problema 2. Determinaţi câte numere de opt cifre conţin în scrierea lor secvenţa "2013". (un exemplu de astfel de număr este 31020135)

Soluţie: Numerele pot avea una din formele: (1) $\overline{2013abcd}$, (2) $\overline{a2013bcd}$, (3) $\overline{ab2013cd}$, (4) $\overline{abc2013d}$, (5) $\overline{abcd2013}$ **1p**
Pentru (1) avem $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$ numere **1p**

Pentru fiecare din cazurile (2), (3), (4) şi (5) avem $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ numere **3p**

Numărul 20132013 apare de două ori; la (1) şi la (5)

Numărul de numere este 45999 .... **2 p**

Problema 3. a) Arătaţi că 30007 este număr compus.

b) Arătaţi că şirul: 37, 307, 3007, ..., $3\underbrace{00...0}_{de\ n\ ori}7, ...$ conţine o infinitate de termeni care sunt numere compuse.

Soluţie: a) Constatăm că $30007 = 37 \cdot 811$, aşadar 30007 este număr compus. .... **3 p**

b) Arătăm că pentru $n = 3k$ numărul $3\underbrace{00...0}_{de\ 3k\ ori}7$ este compus. Scriem $3\underbrace{00...0}_{de\ 3k\ ori}7 = 3 \cdot 10^{3k+1} + 7 = 30 \cdot 10^{3k} + 7$ .... **2 p**

$30 \cdot 10^{3k} + 7 = 30 \cdot 1000^k + 7 = 30 \cdot (999 + 1)^k + 7 = 30 \cdot (\mathcal{M}37 + 1) + 7 = \mathcal{M}37 + 37 = \mathcal{M}37$ .... **2 p**

Notă: Verificarea unor cazuri particulare (30000007, 30000000007) şi afirmaţia că pentru $n = 3k$ obţinem numere compuse se acordă 1 punct.

Problema 4. Se consideră numărul natural n, $n \geq 10$ şi mulţimea $A = \{1, 2, 3, ..., 3n\}$. Spunem că mulţimea nevidă X, $X \subset A$ are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă oricare ar fi $x \in X$ şi $y \in X$, $x > y$, numărul $x + y$ nu se divide cu numărul $x - y$.

a) Daţi un exemplu de mulţime X cu proprietate $\mathcal{P}$ care conţine numerele 4 şi 14 şi care are cel puţin trei elemente.

b) Demonstraţi că există cel puţin o mulţime cu proprietatea $\mathcal{P}$ care are exact n elemente.

c) Arătaţi că nu există o mulţime cu proprietatea $\mathcal{P}$ care să aibă n elemente şi să conţină numerele 4 şi 14.

Soluţie: a) Un posibil exemplu este $X = \{4, 14, 9\}$

Verificarea exemplului .... **1 p**

b) Mulţimea X nu poate conţine numere consecutive şi, deasemenea nu poate conţine numere de aceeaşi paritate consecutive **2p**

Prin urmare, diferenţa minimă dintre două numere din X este cel puţin egală cu 3. Dacă diferenţa minimă este 3, mulţimea X are număr maxim de elemente egal cu n. De exemplu $X_1 = \{1, 4, 7, ..., 3n - 2\}$ şi $X_2 = \{2, 5, 8, ..., 3n - 1\}$ verifică cerinţele problemei. (*este suficient un exemplu*) **2 p**

c) Fie Y cu proprietatea $\mathcal{P}$ astfel încât $4 \in Y, 14 \in Y$. Cum $x, y \in Y, x < y$, implică $y - x \geq 3$, rezultă că în Y sunt cel mult$n - 5$ elemente mai mari ca 14 şi cel mult un element mai mic ca 4. Fie $a, b \in Y$ cu $4 < a < b < 14$. Atunci $a \geq 7, b \leq 11$. Dacă $a = 7$ atunci $14 - 7$ ar divide $14 + 4$, fals. Prin urmare între 4 şi 14 există cel mult un element al lui Y. În concluzie Y ar avea cel mult $1 + 2 + 1 + n - 5 = n - 1$ elemente, fals. .... **2 p**